

Γωνίες

- 1** Διάβασε από το βιβλίο σου και ξεκαθάρισε με τον καθηγητή σου στην τάξη τις παρακάτω έννοιες:

Ημιεπίπεδο

Κυρτή γωνία

Μη κυρτή γωνία

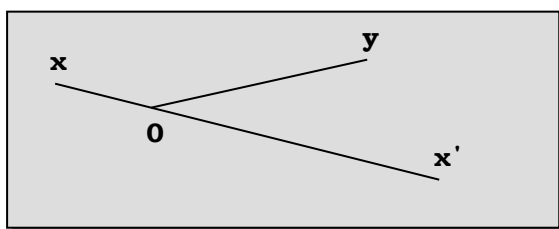
-

Μηδενική γωνία

Πλήρης γωνία

Ευθεία γωνία

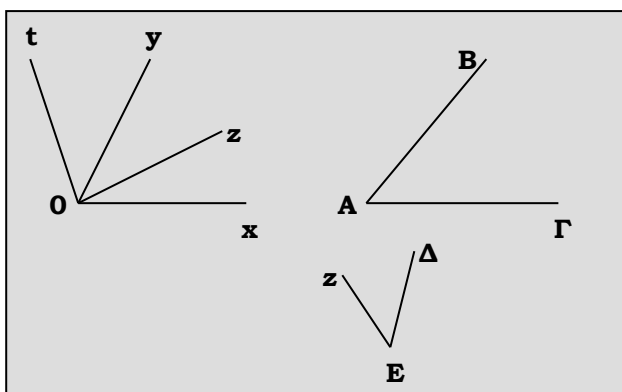
- 2** Στο παρακάτω σχήμα σημείωσε τις κυρτές γωνίες που έχεις. Για μια από αυτές να σχεδιάσεις τα ημιεπίπεδα που την ορίζουν. Να γράψεις αν υπάρχει καμιά ευθεία γωνία



- 3** Με τον καθηγητή σου στην τάξη να μάθεις να συγκρίνεις και να κάνεις πράξεις με γωνίες. Μετά από αυτό με δεδομένο ότι έχουμε πάρει $\hat{xoy} = \hat{\Gamma\hat{A}B}$ και $\hat{y\delta z} = \hat{x\delta z} = \hat{\Delta E Z}$ να βρεις τα:

α) $\hat{\Gamma\hat{A}B} + \hat{\Delta\hat{E}Z}$

β) $\hat{\Gamma\hat{A}B} - \hat{\Delta\hat{E}Z}$



4 α) Να μάθεις τους ορισμούς των:

Διχοτόμος -

ορθή -

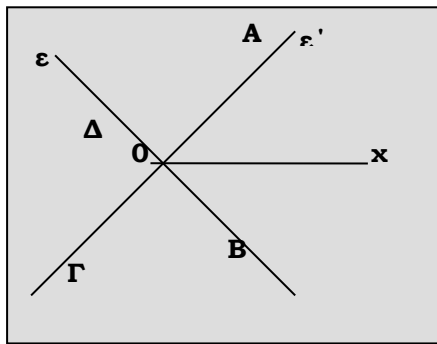
οξεία -

αμβλεία -

ευθείες κάθετες -

μεσοκάθετος ευθ. τμήματος

β) Στο παρακάτω σχήμα με δεδομένο ότι $\varepsilon \perp \varepsilon'$ και ox διχοτόμος της $\angle AOB$ χαρακτήρισε ως προς το είδος τους τις γωνίες



Η $\angle AOX$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle BOA$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle AOX$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle AOB$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle XOΓ$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle AOG$ είναι _ _ _ _ _

5 α) Να μάθεις τους ορισμούς των:

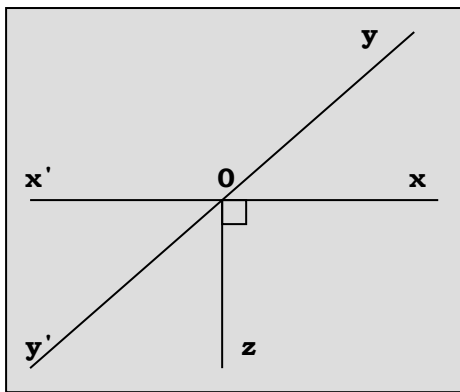
εφεξής γωνίες -

συμπληρωματικές γωνίες

παραπληρωματικές γωνίες -

κατακορυφήν γωνίες

β) Στο παρακάτω σχήμα να βρεις την σχέση που έχουν τα ζεύγη των γωνιών



Η $\angle yox, \angle xoz$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle xoy, \angle yox'$ είναι _ _ _ _ _

Η $\angle x'oy', \angle y'oz$ είναι _ _ _ _ _

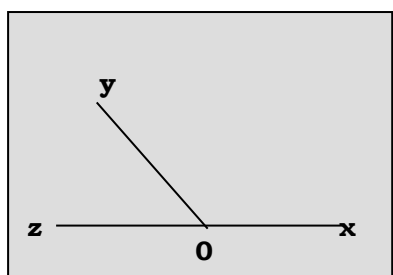
Η $\angle xoy, \angle x'oy'$ είναι _ _ _ _ _



Να συμπληρώσεις στο κενό που σου αφήνω τις αποδείξεις των παρακάτω θεωρημάτων που θα σου κάνει ο καθηγητής σου στον πίνακα

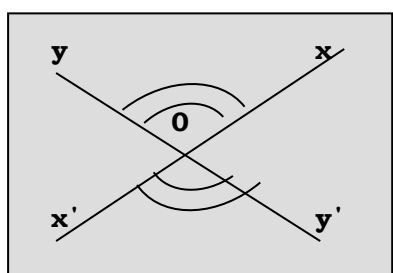
ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ευθείες τους και αντίστροφα



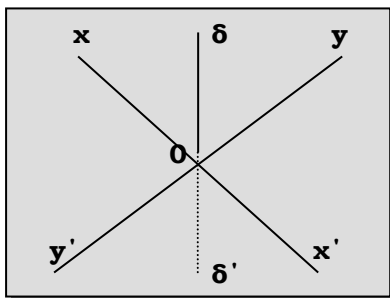
ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες



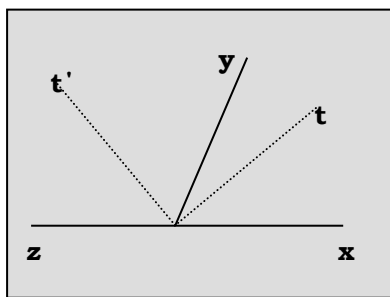
ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφής της γωνίας



ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες



ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από σημείο O ευθείας $x'x$ φέρνουμε ημιευθεία oy και τη διχοτόμο OD της $\angle xOy$. Ναδειχθεί ότι :

i) Αν η ημιευθεία OZ περιέχεται στη $\angle xOy$, τότε

$$\angle ZOx = \frac{\angle ZOy + \angle ZOx}{2}$$

ii) Αν η ημιευθεία OZ περιέχεται στη $\angle yOD$, τότε

$$\angle ZOx = \frac{\angle ZOy - \angle ZOx}{2}$$

Λύση

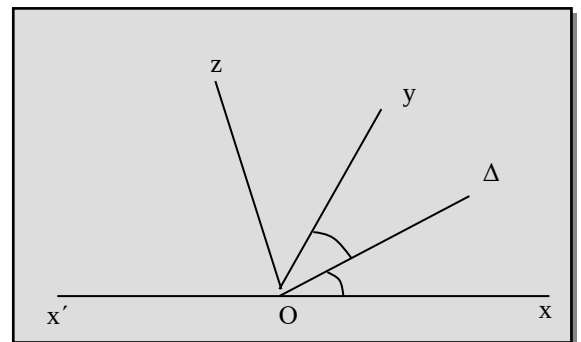
i) Είναι :
$$\begin{cases} \angle ZOx = \angle ZOy - \angle DOx & (1) \\ \angle ZOx = \angle ZOy + \angle DOx & (2) \end{cases}$$

Από τις σχ. (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$2\angle ZOx = (\angle ZOy - \cancel{\angle DOx}) + (\angle ZOy + \cancel{\angle DOx})$$

$$\Leftrightarrow 2\angle ZOx = \angle ZOy + \angle ZOx$$

$$(\text{γιατί } \angle DOx = \angle ZOx) \Leftrightarrow \angle ZOx = \frac{\angle ZOy + \angle ZOx}{2}$$



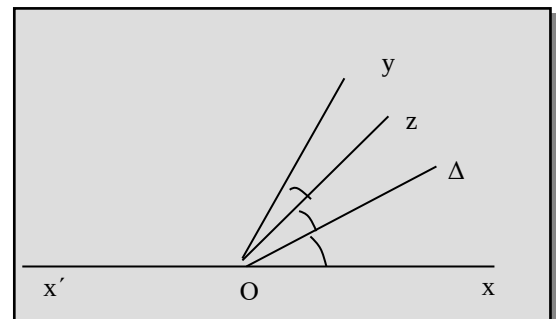
ii) Είναι :
$$\begin{cases} \angle ZOx = \angle ZOy - \angle DOx & (3) \\ \angle ZOx = \angle DOx - \angle ZOy & (4) \end{cases}$$

Από τις σχ. (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$2\angle ZOx = (\angle ZOy - \cancel{\angle DOx}) + (\cancel{\angle DOx} - \angle ZOy) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\angle ZOx = \angle ZOy - \angle ZOy \quad (\text{γιατί } \angle DOx = \angle ZOx)$$

$$\Leftrightarrow \angle ZOx = \frac{\angle ZOy - \angle ZOy}{2}$$



- 2.** Δίνονται τέσσερις διαδοχικές γωνίες α , β , γ , δ που σχηματίζουν πλήρη γωνία και τα μέτρα τους είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 3, 4, 5, 6. Να βρείτε τις γωνίες αυτές.

Λύση

$$\text{Από την υπόθεση έχουμε : } \frac{(\hat{\alpha})}{3} = \frac{(\hat{\beta})}{4} = \frac{(\hat{\gamma})}{5} = \frac{(\hat{\delta})}{6} = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} (\hat{\alpha}) = 3\lambda \\ (\hat{\beta}) = 4\lambda \\ (\hat{\gamma}) = 5\lambda \\ (\hat{\delta}) = 6\lambda \end{cases}$$

$$\text{και } (\hat{\alpha}) + (\hat{\beta}) + (\hat{\gamma}) + (\hat{\delta}) = 360^\circ \Leftrightarrow 3\lambda + 4\lambda + 5\lambda + 6\lambda = 360^\circ \Leftrightarrow 18\lambda = 360^\circ \Leftrightarrow \lambda = 20^\circ$$

$$\text{Επομένως } \hat{\alpha} = 60^\circ, \hat{\beta} = 80^\circ, \hat{\gamma} = 100^\circ \text{ και } \hat{\delta} = 120^\circ$$

- 3.** Να υπολογίσετε γωνία ω της οποίας το τριπλάσιο της συμπληρωματικής της και το διπλάσιο της παραπληρωματικής της έχουν άθροισμα 300°

Λύση

Η συμπληρωματική της ω είναι $90^\circ - \omega$

Η παραπληρωματική της ω είναι $180^\circ - \omega$

$$\text{Άρα } 3(90^\circ - \omega) + 2(180^\circ - \omega) = 300^\circ \Rightarrow$$

$$270^\circ - 3\omega + 360^\circ - 2\omega = 300^\circ \Rightarrow$$

$$-3\omega - 2\omega = 300^\circ - 270^\circ - 360^\circ \Rightarrow$$

$$-5\omega = -330^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{-330^\circ}{-5} \Leftrightarrow \omega = 66^\circ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι η γωνία των διχοτόμων δύο εφεξής γωνιών είναι ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.

2. Να βρεθούν τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ (αν η μια είναι οξεία και οι άλλες δύο αμβλείες) αν είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 4, 6 αντίστοιχα και έχουν άθροισμα μια πλήρη γωνία

3. Από ένα σημείο O μιας ευθείας AB φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της AB τις ημιευθείες OG και OD έτσι ώστε οι γωνίες $\hat{AOG}$, $\hat{GOD}$, $\hat{DOB}$ να είναι διαδοχικές. Αν Ox , Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{AOG}$ και $\hat{DOB}$ αντίστοιχα και $\hat{xOy} = 100^\circ$, να βρείτε τη γωνία $\hat{GOD}$

4. Να βρείτε το μέτρο μιας γωνίας $\hat{\omega}$, αν είναι γνωστό ότι τα $\frac{2}{3}$ της συμπληρωματικής και τα $\frac{3}{5}$ της παραπληρωματικής της έχουν άθροισμα 57° .

5. Αν από το εξαπλάσιο μιας οξείας γωνίας αφαιρέσουμε τη συμπληρωματικής της, θα βρούμε το διπλάσιο της παραπληρωματικής της. Να βρεθεί η γωνία.

6. Το τριπλάσιο μιας γωνίας ω είναι ίσο με το άθροισμα της παραπληρωματικής της και το διπλάσιο της συμπληρωματικής της. Να βρεθεί η συμπληρωματική γωνία της ω .
