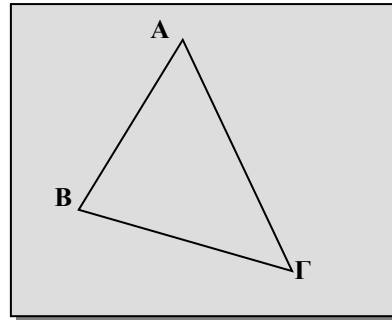


Τρίγωνα

1

Στο τρίγωνο ΑΒΓ να ορίσεις όλα τα κύρια στοιχεία του.



2

Στο παραπάνω τρίγωνο να ορίσεις την περίμετρο του και να την συμβολίσεις

3

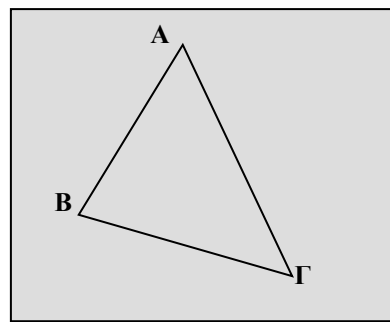
Γράψε τα τρία είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές και φτιάξε ένα από κάθε είδος.

4

Γράψτε τα τρία είδη τριγώνου ως προς τις γωνίες και φτιάξε ένα από κάθε είδος

5

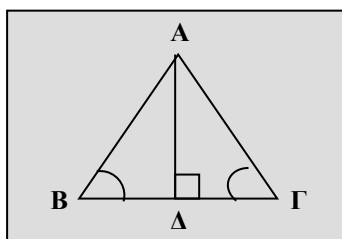
Στο τρίγωνο ΑΒΓ να ορίσεις όλα τα δευτερεύοντα στοιχεία και να σχεδιάσεις αυτά που ξεκινούν από το Α

**6**

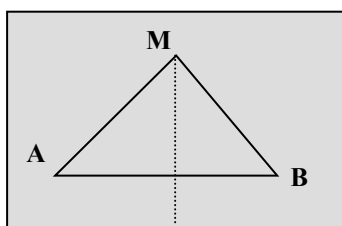
Να μάθεις και να διατυπώνεις αλλά και να εφαρμόζεις τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

(Θ₁ Σελ.36)**(Θ₂ Σελ.39)****(Θ₃ Σελ.39)****7**

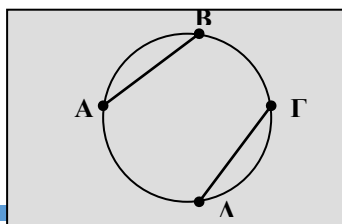
Να μάθεις τις δύο ιδιότητες που έχει κάθε ισοσκελές τρίγωνο. (Να ξέρεις και τις αποδείξεις τους)

(Πόρισμα 1 σελ 37)**8**

Να ξέρεις την ιδιότητα που έχουν τα σημεία της μεσοκάθετης ενός ευθύγραμμου τμήματος. (Να μάθεις και την απόδειξη ευθύ και αντίστροφο)

(σελ 37,40)**9**

Να ξέρεις τι ιδιότητα έχουν οι χορδές κύκλου που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα (ευθύ και αντίστροφο)

(Απόδειξη σελ 37,41)

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Με βάσεις τις πλευρές ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα έξω από το ισοσκελές. Να αποδειχθεί ότι οι εξωτερικές κορυφές τους σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

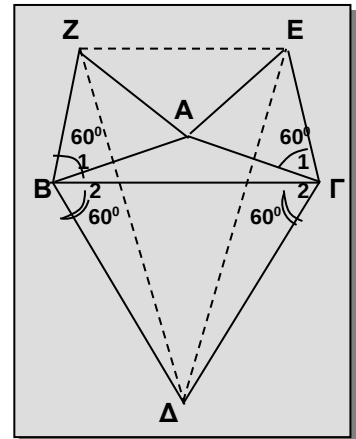
Λύση

Τα τρίγωνα $B\Delta Z$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν :

- i) $\Delta B = \Delta \Gamma$ (Υ)
- ii) $\Delta \hat{B}Z = \Delta \hat{\Gamma}E = (60^\circ + \hat{\omega} + 60^\circ)$
- iii) $BZ = \Gamma E$

(Είναι $BZ = BA$ από το ισόπλ. ZAB
Είναι $AB = A\Gamma$ από το ισοσκ. $AB\Gamma$
και $A\Gamma = \Gamma E$ από το ισόπλ. EAG) $\Rightarrow BZ = \Gamma E$

$\Rightarrow \Delta BZ = \Delta \Gamma E$ (Π-Γ-Π) $\Rightarrow \Delta Z = \Delta E$,
άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.



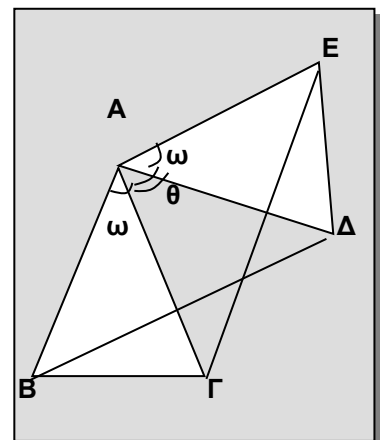
2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ με κορυφή το A έχουν $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$. Ναδειχτεί ότι $B\Delta = \Gamma E$ ή $BE = \Gamma\Delta$.

Λύση

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A E$ έχουν :

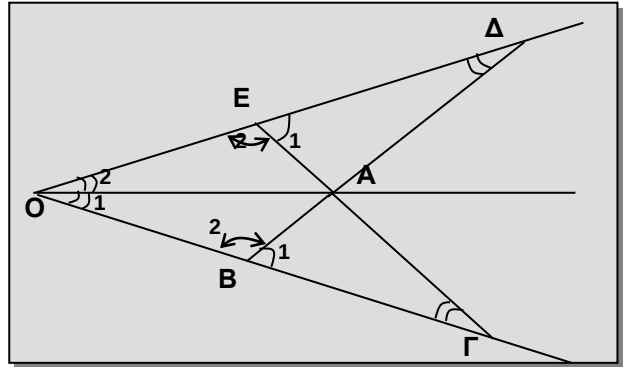
- i) $AB = A\Gamma$ (από την υπόθεση)
- ii) $A\Delta = AE$ (Υ)
- iii) $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E = \hat{\omega} + \hat{\theta}$

$\Rightarrow \Delta AB\Delta = \Delta A\Gamma E$ (Π-Γ-Π) $\Rightarrow B\Delta = \Gamma E$



Σημείωση : Αν εναλλάξουμε τις κορυφές Δ και E θα βρούμε $BE = \Gamma\Delta$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$). Προεκτείνουμε τις πλευρές του BA και ΓA προς το μέρος του A και παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E έτσι, ώστε : $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$. Αν οι ευθείες $B\Gamma$ και ΔE τέμνονται στο O να δείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο OBE είναι ισοσκελές.
β) OA είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{O}\Gamma$



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν :

i) $AB = AE$ (Υ)

ii) $A\Gamma = A\Delta$ (Υ)

iii) $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ (ως κατακορυφήν)

$$\Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle A\Delta E \quad (\Pi-\Gamma-\Pi)$$

$\Rightarrow$ Άρα τα τρίγωνα

αυτά έχουν $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (1)

και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ (2)

Τα τρίγωνα $OB\Delta$ και $OE\Gamma$ έχουν :

i) $\hat{B}_2 = \hat{E}_2$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $\hat{B}_1$, $\hat{E}_1$)

ii) $B\Delta = E\Gamma$ (διότι $AB = AE$ και $A\Delta = A\Gamma$) $\overset{(+)}{\Rightarrow} AB + A\Delta = A\Gamma + AE \Rightarrow B\Delta = E\Gamma$

iii) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (λόγω της σχ. (2))

$$\Rightarrow \triangle OB\Delta = \triangle OE\Gamma \quad (\Gamma-\Pi-\Gamma) \Rightarrow OB = OE \quad (3) \Rightarrow \triangle OBE \text{ ισοσκελές}$$

β) Τέλος τα τριγ. OAB και OAE έχουν :

i) $OA = OA$ (κοινή)

ii) $OB = OE$ (λόγω της σχ. (3))

iii) $AB = AE$ (Υ)

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAE$ (Π-Π-Π). Άρα τα τρίγωνα αυτά έχουν και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow OA$ είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{O}\Delta$.

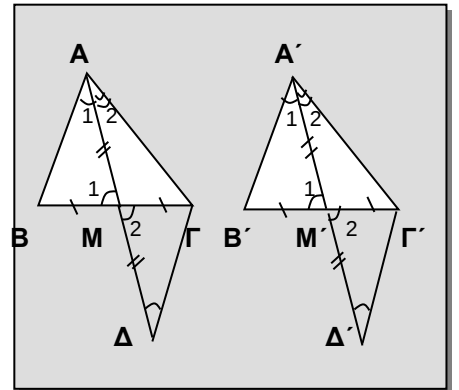
2. Να δείξετε ότι : Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες διαμέσους ίσες τότε είναι ίσα.

Από την υπόθεση τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $AB=A'B'$ και $A\Gamma=A'\Gamma'$.

Επομένως για να είναι ίσα θα πρέπει να αποδείξουμε ότι και $B\Gamma=B'\Gamma'$ ή ότι $\hat{A}=\hat{A}'$.

Αρχικά δεν μπορούμε να βρούμε ίσα τρίγωνα. Πολλές όμως από τις ασκήσεις που έχουν σχέση με διάμεσο λύνονται προεκτείνοντας τη διάμεσο κατά ίσο τμήμα.

Προεκτείνουμε λοιπόν τις διαμέσους AM και $A'M'$ τμήματα $M\Delta$ και $M'\Delta'$ έτσι, ώστε : $M\Delta=MA$ (1) και $M'\Delta'=M'A'$ (2).



• Συγκρίνουμε τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$. Έχουν :

- i) $MA=M\Delta$ (λόγω της (1))
- ii) $MB=M\Gamma$ (Το M μέσο της $B\Gamma$)
- iii) $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν)

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle M\Delta\Gamma \text{ (Π-Γ-Π)} \Rightarrow AB=\Gamma\Delta \text{ (3) και } \hat{A}_1=\hat{A} \text{ (4)}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι: $\triangle M'A'B' = \triangle M'\Delta'\Gamma'$ οπότε $A'B'=\Gamma'\Delta'$ (3') και $\hat{A}'_1=\hat{A}'$ (4')

Επειδή από την υπόθεση είναι $AB=A'B'$, από τις (3), (3') παίρνουμε $\Gamma\Delta=\Gamma'\Delta'$. (5)

• Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A'\Gamma'\Delta'$. Έχουν :

- i) $A\Gamma=A'\Gamma'$ (Υ)
- ii) $\Gamma\Delta=\Gamma'\Delta'$ (λόγω της σχ. (5))

$$\begin{array}{l}
 \text{iii)} \quad \underline{A\Delta = A'\Delta' \quad (\text{από την υπόθεση έχουμε} \quad :} \\
 \quad \quad \underline{AM = A'M' \Leftrightarrow 2AM = 2A'M' \Leftrightarrow A\Delta = A'\Delta')} \\
 \Rightarrow \overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\overset{\Delta}{\Delta} = \overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{\Gamma}'\overset{\Delta}{\Delta}' \quad (\Pi-\Gamma-\Pi) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad (6) \text{ και } \hat{\Delta} = \hat{\Delta}'.
 \end{array}$$

Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$ από τις σχέσεις (4) και (4') παίρνουμε $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ (7)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (6) και (7) κατά μέλη παίρνουμε :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}'_1 + \hat{A}'_2 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}' \quad (8)$$

Τέλος συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$. Έχουν :

$$\begin{array}{l}
 \text{i)} \quad AB = A'B' \quad (\text{από υπόθεση}) \\
 \text{ii)} \quad \hat{A} = \hat{A}' \quad (\text{ισότητα (8)}) \\
 \text{iii)} \quad \underline{A\Gamma = A'\Gamma' \quad (\text{από υπόθεση})} \\
 \Rightarrow \overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{B}\overset{\Delta}{\Gamma} = \overset{\Delta}{A}'\overset{\Delta}{B}'\overset{\Delta}{\Gamma}' \quad (\Pi-\Gamma-\Pi)
 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του προς το μέρος της κορυφής A παίρνουμε τμήματα $AD=AE$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ ναδειχθεί ότι το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.

2. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές του AB , $B\Gamma$, ΓA κατά κυκλική σειρά και σε κάθε προέκταση παίρνουμε τμήμα $BA'=GB'=AG'$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι ισόπλευρο.

3. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$.
 Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Δίνεται μια γωνία $\hat{xOy}$. Στην πλευρά Ox παίρνουμε τα σημεία A, B και στην Oy τα σημεία Γ, Δ τέτοια ώστε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Αν τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Σ , να δείξετε ότι το Σ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy}$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD . Η ευθεία BM τέμνει την GA στο B' και η $M\Gamma$ τέμνει την AB στο Γ' . Δείξτε ότι :
- i) $BB'=\Gamma\Gamma'$ και
 - ii) $MB'=M\Gamma'$.

6. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ορίζουν επίσης ισοσκελές τρίγωνο.

[illegible]