

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

1.

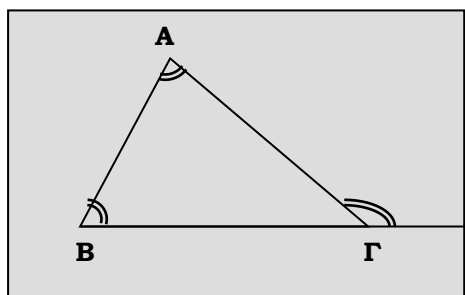
Θα πρέπει να ξέρεις τι είναι ο γεωμετρικός τόπος και τους τρεις βασικούς γεωμετρικούς τύπους που έχει το βιβλίο σου (σελ. 49)

2.

Θα πρέπει να ξέρεις τι είναι η κεντρική συμμετρία και τι η αξονική καθώς και σχήματα που παρουσιάζουν τέτοιου είδους συμμετρίες (σελ.50-51)

3.

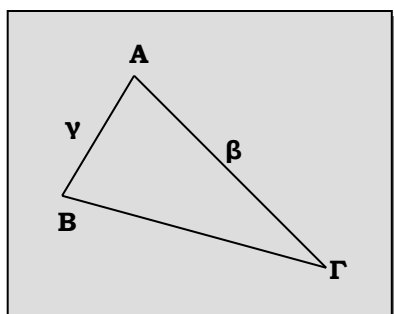
Θα πρέπει να ξέρεις τι σχέση έχει μία εξωτερική γωνία τριγώνου με κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές (θεώρημα σελ 53)



ότι δηλαδή $\Gamma_{\varepsilon\zeta} > A$ και $\Gamma_{\varepsilon\zeta} > B$

4.

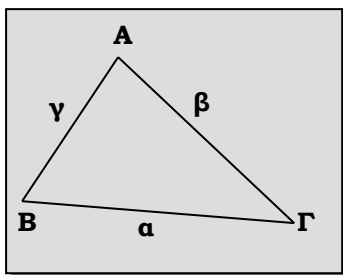
Θα πρέπει να ξέρεις τι σχέση έχουν δύο γωνίες που βρίσκονται απέναντι από άνισες πλευρές και όμοια τι σχέση έχουν δύο πλευρές που βρίσκονται απέναντι από άνισες γωνίες (θεώρημα σελ 54)



ότι δηλαδή $\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$

5

Θα πρέπει να ξέρεις να διατυπώνεις και να εφαρμόζεις την τριγωνική ανισότητα (θεώρημα σελ 54)



ότι δηλαδή $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$

6.

Θα διαβάσεις πολύ καλά την εφαρμογή 2 του βιβλίου σου (σελ 55) και στο κενό που σου αφήνω θα συμπληρώσεις την απόδειξη της πρότασης :

Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η AD είναι διχοτόμος και διάμεσος τότε το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

.....

.....

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

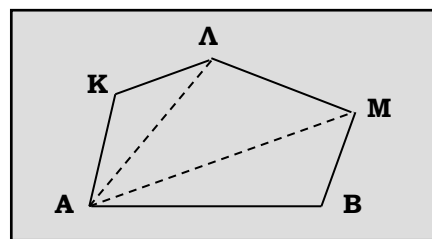
1. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από το άθροισμα των πλευρών οποιασδήποτε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα.

Λύση

Θα δείξουμε ότι:

$$AB < AK + KL + LM + MB$$

Πράγματι εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα διαδοχικά έχουμε:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Από το τρίγωνο } ABM: AB < AM + MB \\ \text{Από το τρίγωνο } ALM: AM < AL + LM \\ \text{Από το τρίγωνο } AKL: AL < AK + KL \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB + \cancel{AM} + \cancel{AL} < \cancel{AM} + MB + \cancel{AL} + LM + AK + KL$$

$$AB < AK + KL + LM + MB$$

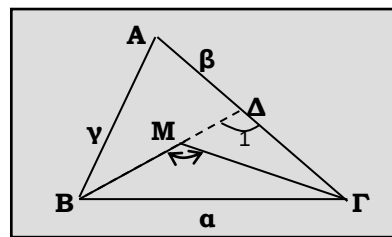
2. Αν M σημείο στο εσωτερικό τρίγωνου ABΓ, τότε ισχύει:

i) $MB + MG < AB + AG$ και

ii) $\widehat{BMG} > A$.

Λύση

i) Έστω Δ το σημείο τομής των ΒΜ και ΑΓ (το Δ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΓ, διότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ).



$$\left. \begin{array}{l} \text{Από το τρίγωνο } AB\Delta: MB + M\Delta < AB + A\Delta \\ \text{Από το τρίγωνο } \Delta M\Gamma: M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB + \cancel{M\Delta} + M\Gamma < AB + A\Delta + \cancel{M\Delta} + \Delta\Gamma$$

$$MB + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) \Rightarrow MB + M\Gamma < AB + AG \quad \text{ή} \quad MB + M\Gamma < \gamma + \beta \quad (1)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Από το τρίγωνο MBΓ: $\alpha < MB + M\Gamma$ (2), οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\alpha < MB + M\Gamma < \beta + \gamma$

- ii) Από το τρίγωνο ΜΓΔ έχουμε : $\widehat{BM\Gamma} > \widehat{\Delta}_1$ (3) (γιατί είναι εξωτερική) ενώ από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε : $\widehat{\Delta}_1 > \widehat{A}$ (4) (γιατί είναι εξωτερική)

Από τις σχέσεις (3) και (4) $\Rightarrow \widehat{BM\Gamma} > \widehat{A}$

- 3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ και σημείο Ο της διαμέσου ΑΜ. Ναδειχτεί ότι: i) $\widehat{AM\Gamma} > \widehat{AMB}$ και ii) $OG > OB$.**

Λύση

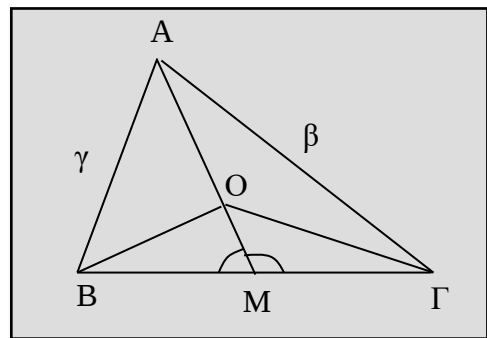
- i) Τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ έχουν:

α) $MA = MA$ (κοινή)

β) $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$

γ) $AB < AG$ (από την υπόθεση)

$$\Rightarrow \widehat{AM\Gamma} > \widehat{AMB}$$



(γιατί αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τρίτο ζεύγος άνισες τότε απέναντι από τις άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες)

- ii) Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΟΜΓ έχουν:

α) $OM = OM$ (κοινή)

β) $MB = MG = \frac{\alpha}{2}$

γ) $\widehat{OMB} < \widehat{OM\Gamma}$ (λόγω του (i))

$$\Rightarrow OB < OG$$

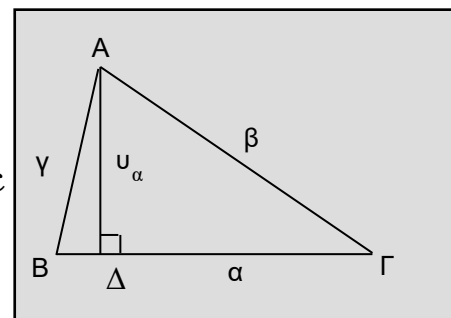
(γιατί αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες τότε απέναντι από τις άνισες γωνίες βρίσκονται όμοια άνισες πλευρές)

4. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν:

i) $u_a < \frac{\beta + \gamma}{2}$ και ii) $u_a + u_b + u_c < 2\tau$.

Λύση

i) Από το σημείο A προς την ευθεία BΓ έχουμε φέρει το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AΔ και τα πλάγια AB και AΓ, οπότε έχουμε:



$$\left. \begin{array}{l} A\Delta < AB \Leftrightarrow u_a < \gamma \\ \text{και } A\Delta < A\Gamma \Leftrightarrow u_a < \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(+)} 2u_a < \beta + \gamma \Leftrightarrow u_a < \frac{\beta + \gamma}{2} \quad (1) \end{array}$$

ii) Ομοίως αποδεικνύεται ότι: $u_b < \frac{\gamma + \alpha}{2}$ (2) και $u_c < \frac{\alpha + \beta}{2}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$u_a + u_b + u_c < \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma + \alpha}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow u_a + u_b + u_c < \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow u_a + u_b + u_c < 2\tau$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η περίμετρος τριγώνου διεθνώς συμβολίζεται με 2τ .
Δηλαδή: $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$. Από την κορυφή B φέρνουμε τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα $BΔ$ (το $Δ$ σημείο της $AΓ$). Να αποδείξετε ότι $BΔ > ΔΓ$.

2. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AΓ$. Αν AD η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ να δείξετε ότι $ΔB < ΔΓ$.

- 3.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB , $A\Gamma$ λαμβάνουμε τα σημεία Δ και E αντιστοίχως, έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι: i) $\Delta E > B\Gamma$ και ii) $BE > \Gamma\Delta$.

- 4.** Να δείξετε ότι κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από την ημιπερίμετρο του τριγώνου.

5. Αν το M είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι $\tau < MA + MB + M\Gamma < 2\tau$ (όπου $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$).

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M τυχαίο σημείο της πλευράς του $B\Gamma$. Αν Δ, E είναι οι προβολές του M στις $AB, B\Gamma$ αντιστοίχως, να δείξετε ότι $\Delta E < B\Gamma$.
