

Πλάγια, Κάθετα τμήματα

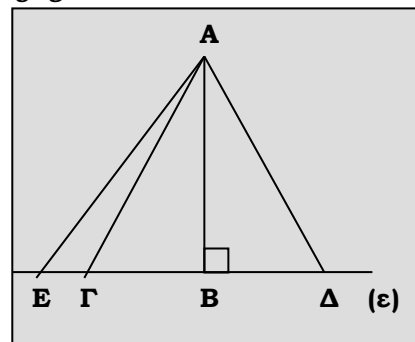
1. Στο δίπλα σχήμα είναι $AB \perp (\varepsilon)$ και $B\Gamma = B\Delta$. Να βάλεις το κατάλληλο σύμβολο $=$, $<$ ή $>$ στα παρακάτω δικαιολογώντας κάθε φορά γιατί επέλεξες το συγκεκριμένο.

1. $A\Gamma : A\Delta$ γιατί

2. $A\Gamma : AB$ γιατί

3. $AE : A\Delta$ γιατί

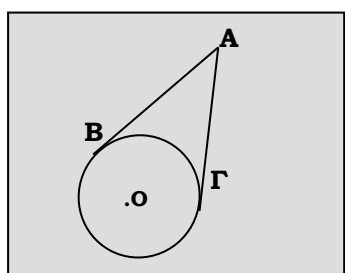
(θα σε βοηθήσουν τα Θ_1 , Θ_2 , σελ 59)



2. Θα πρέπει να ξέρεις τις τρεις θέσεις που μπορούν να έχουν μία ευθεία και ένας κύκλος καθώς και με ποια προϋπόθεση έχουμε την κάθε μια περίπτωση.

(σελ. 61)

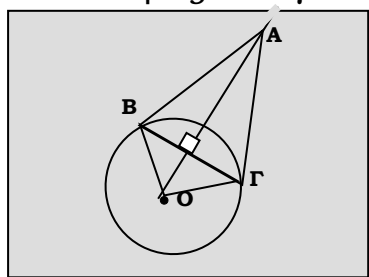
3. Θα πρέπει να ξέρεις να αποδεικνύεις ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους.



(Θ_2 σελ. 62)

Ότι δηλαδή $AB = AG$

4. Να αποδείξεις ότι η AO είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$ και διχοτόμος των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}\hat{O}\hat{G}$



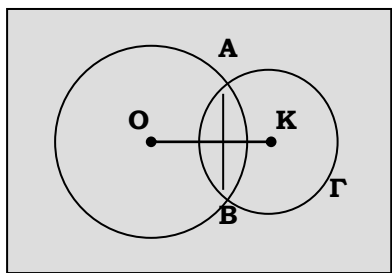
5

Θα πρέπει να ξέρεις τις 6 θέσεις που μπορούν να έχουν δύο κύκλοι καθώς και με ποια προϋπόθεση έχουμε την κάθε περίπτωση.

(Σελ. 63-64)

6.

Θα πρέπει να ξέρεις να αποδεικνύεις ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Ότι δηλαδή $OK \perp AB$

7.

Να μάθεις να κάνεις:

α) Μεταφορά γωνίας

β) Κατασκευή μεσοκαθέτου

γ) Κατασκευή κάθετης σε ευθεία (ε) σε σημείο της

δ) Κατασκευή κάθετης σε ευθεία (ε) από σημείο που είναι έξω από αυτήν

ε) Κατασκευή διχοτόμου

στ) Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου σε δοσμένο σημείο Α

8.

Να μάθεις να κατασκευάζεις τρίγωνο όταν σου δίνουν:

α) Δύο πλευρές και περιεχόμενη γωνία

β) Μία πλευρά και προσκείμενες γωνίες

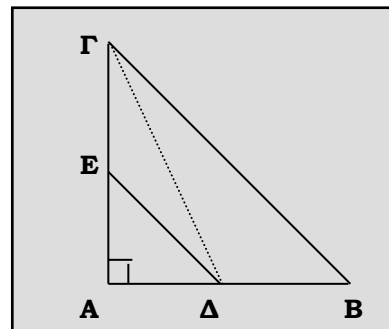
γ) Τις τρεις πλευρές του

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τα σημεία Δ και E στις κάθετες πλευρές του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\Delta E < B\Gamma$.

Λύση

Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Παρατηρούμε ότι από το σημείο Γ προς την ευθεία AB έχουμε φέρει το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΓA και τα πλάγια ΓB και $\Gamma\Delta$,



οπότε έχουμε: $\Gamma\Delta < \Gamma B$ (1) (διότι $A\Delta < AB$).

Ομοίως από το σημείο Δ προς την ευθεία $A\Gamma$ έχουμε φέρει το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΔA και τα πλάγια ΔE και $\Delta\Gamma$ οπότε έχουμε: $\Delta E < \Delta\Gamma$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε $\Delta E < B\Gamma$

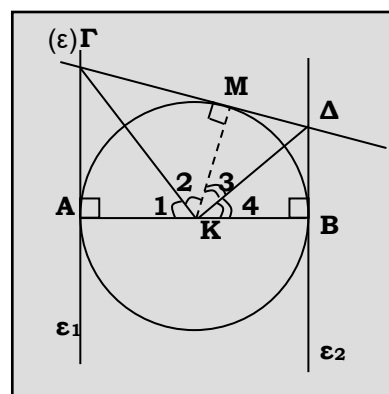
2. Σε κύκλο (K, R) φέρνουμε διάμετρο AB και τις εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) του κύκλου στα A , B αντίστοιχα. Μια άλλη εφαπτομένη (ε) του κύκλου τέμνει τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία Γ , Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{K}\Delta = 90^\circ$

Λύση

Φέρνουμε την ακτίνα KM , όπου M το σημείο επαφής της ευθείας (ε) και του κύκλου (K, R) .

Τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και $MK\Gamma$ έχουν :

- i) $\hat{A} = \hat{M} = 90^\circ$
- ii) $K\Gamma = K\Gamma$ (κοινή)
- iii) $KA = KM = R$



$$\Rightarrow \hat{A}\hat{K}\Gamma = \hat{M}\hat{K}\Gamma$$

(είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες)

$\Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_2$, άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ διχοτομεί τη γωνία ΑΚΜ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι το ευθ. τμήμα ΚΔ διχοτομεί τη γωνία ΒΚΜ.

Επειδή οι γωνίες ΑΚΜ και ΒΚΜ είναι εφεξής και παραπληρωματικές οι διχοτόμοι τους τέμνονται κάθετα. Δηλαδή $K\Gamma \perp K\Delta \Leftrightarrow \hat{G}\hat{K}\Delta = 90^\circ$.

3. Από σημείο Μ εκτός κύκλου (Κ, R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ του κύκλου. Αν προεκτείνουμε την ακτίνα ΚΑ κατά ίσο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, να αποδείξετε ότι $B\hat{M}\Gamma = 3K\hat{M}A$

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΒΜΚ έχουν :

i) $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

ii) $KM = KM$ (κοινή)

iii) $KA = KB = R$

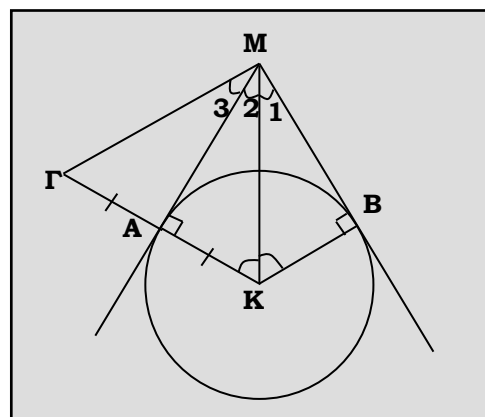
$\Rightarrow \hat{A}\hat{M}\hat{K} = \hat{B}\hat{M}\hat{K}$ (είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες)

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (1)

Το τρίγωνο ΜΓΚ είναι ισοσκελές διότι το ύψος του ΜΑ είναι διάμεσός του, οπότε είναι και διχοτόμος του. Δηλαδή :

$\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) $\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = \hat{\omega}$, τότε $B\hat{M}\Gamma = 3\hat{\omega} = 3K\hat{M}A$.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το ευθ. τμήμα ΜΚ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΒ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα ευθ. τμήματα ΜΑ, ΜΒ που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (Κ, α), καθώς και τη γωνία ΑΚΒ που σχηματίζουν οι ακτίνες που άγονται στα σημεία επαφής.

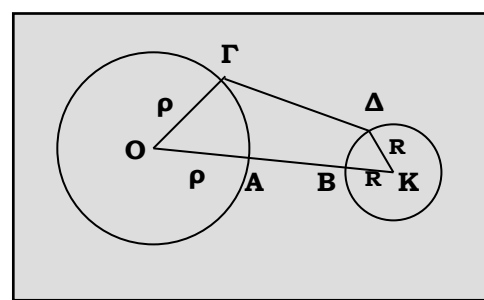
4. Θεωρούμε δύο κύκλους (O, ρ) και (K, R) έτσι, ώστε $OK > R + \rho$. Αν η διάκεντρος OK τέμνει τους κύκλους στα σημεία A και B , να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε σημεία Γ και Δ των κύκλων (O, ρ) και (K, R) αντίστοιχα ισχύει $\Gamma\Delta \geq AB$.

Σημείωση. Το ευθ. τμήμα AB καλείται απόσταση των δύο κύκλων γιατί είναι το πιο μικρό ευθ. τμήμα που τα άκρα του είναι σημεία των δύο κύκλων. Όταν δύο κύκλοι εφάπτονται ή τέμνονται, έχουν «μηδενική» απόσταση.

Λύση

Αφού $OK > R + \rho$ ο ένας κύκλος είναι έξω από τον άλλο.

Ξέρουμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από τεθλασμένη γραμμή που έχει τα ίδια άκρα με αυτό, άρα

$$OK < OG + \Gamma\Delta + \Delta K \Rightarrow \cancel{\rho} + AB + \cancel{R} < \cancel{\rho} + \Gamma\Delta + \cancel{R} \Rightarrow AB < \Gamma\Delta.$$


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Θεωρούμε μια διάμετρο AB ενός κύκλου (O, ρ) και ένα σημείο Γ στη προέκτασή της προς το μέρος του A . Από το Γ φέρνουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο σε σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Gamma\Delta = \rho$. Να δείξετε ότι $\widehat{EOB} = 3\widehat{DOA}$

2. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ , μία εξωτερική εφαπτομένη τους AB και μια εσωτερική εφαπτομένη τους $\Gamma\Delta$. Αν οι εφαπτόμενες αυτές τέμνονται στο I να δείξετε ότι $\widehat{K\hat{I}\Lambda} = 90^\circ$

3. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους (K, ρ) και (Λ, ρ) με $K\Lambda > 2\rho$. Από το μέσο M της $K\Lambda$ φέρνουμε μία ευθεία, η οποία τέμνει τον έναν κύκλο στα σημεία A, B και τον άλλο στα σημεία Γ, Δ . Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.
