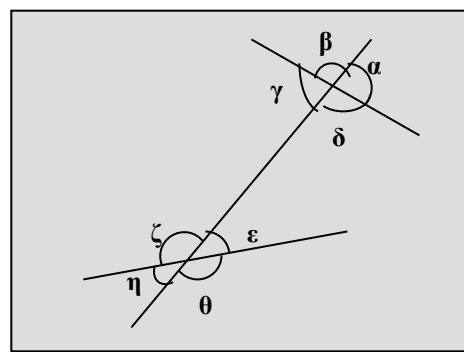


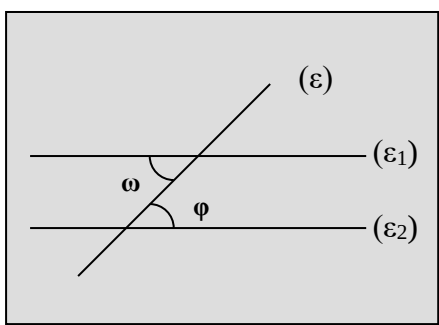
ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1. Θα ξέρεις πότε δύο ευθείες τις λέμε παράλληλες

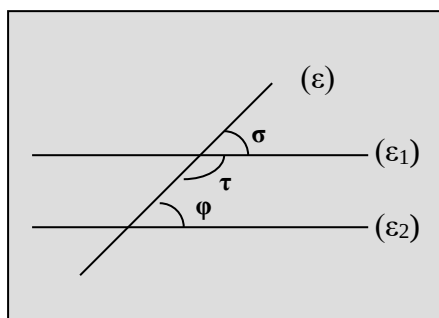
2. Οι ε , γ λέγονται.....
 Οι ε , δ λέγονται.....
 Οι ε , α λέγονται
 Οι ε , β λέγονται
 Οι θ , α λέγονται
 Οι θ , β λέγονται



3. Θα ξέρεις να αποδεικνύεις ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες, και αντίστροφα αν είναι παράλληλες οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες δηλ.
 $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega = \varphi$



4.



α) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ τι σχέση έχουν οι φ , τ και τι οι φ , σ ;

β) Ισχύουν τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων;

5. Τι σχέση έχουν δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία της και γιατί;

6. Να διατυπώσετε το Ευκλείδειο αίτημα

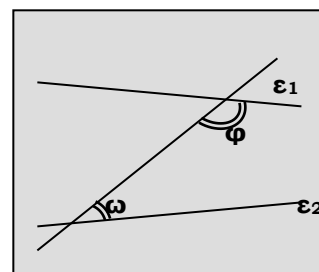
7. Να ξέρεις να διατυπώνεις και να αποδεικνύεις τις παρακάτω σχέσεις

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon, \varepsilon_2 // \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$

β) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε τέμνει την $\varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon$ τέμνει την ε_2

γ) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon \perp \varepsilon_2$

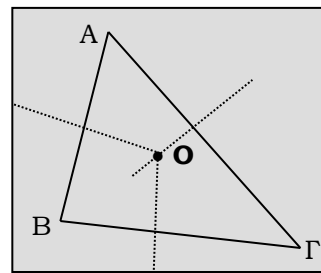
8. Θα ξέρεις ότι για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες τέμνονται θα αποδεικνύουμε ότι ένα ζεύγος εντός και επί τ' αυτά γωνιών έχει άθροισμα λιγότερο από 180° (τέμνονται προς το μέρος των γωνιών αυτών)



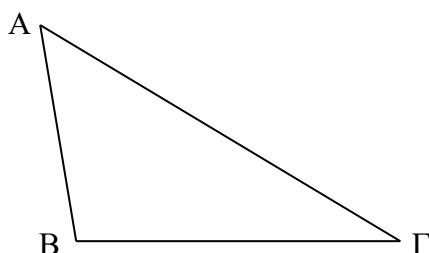
9. Στο κενό που σου αφήνω ζωγράφισε δύο οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες καθώς και δύο αμβλείες με πλευρές παράλληλες και γράψε την σχέση που έχουν

10. Ζωγράφισε μια οξεία και μια αμβλεία με πλευρές παράλληλες και γράψε την σχέση που έχουν

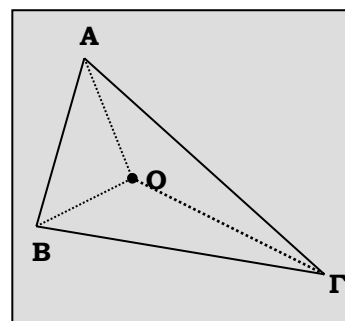
- 11.** Θα ξέρεις να αποδεικνύεις ότι οι μεσοκάθετοι πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Πώς λέγεται το σημείο αυτό; Ποιανού κύκλου κέντρο είναι;



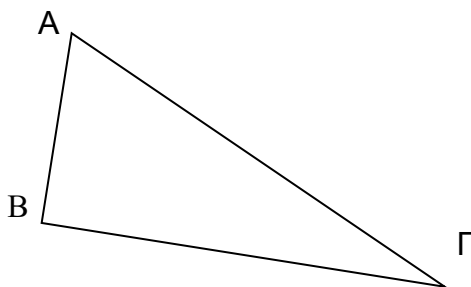
- 12.** Φτιάξε τον περιγεγραμμένο κύκλο στο παρακάτω τρίγωνο



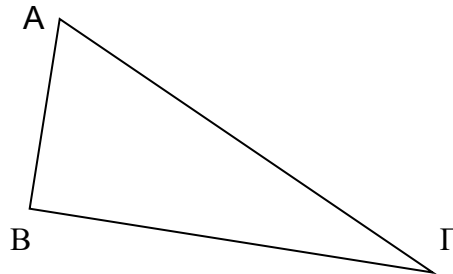
- 13.** Θα ξέρεις να αποδεικνύεις ότι οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Πώς λέγεται το σημείο αυτό; Ποιανού κύκλου κέντρο είναι;



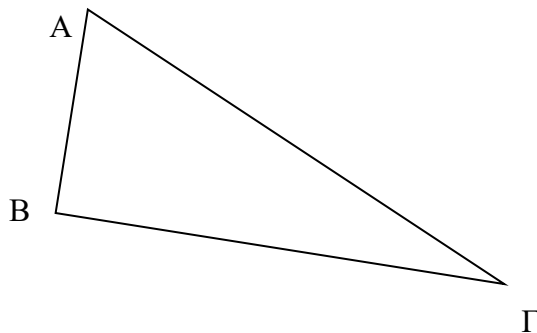
- 14.** Φτιάξε τον εγγεγραμμένο κύκλο στο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$



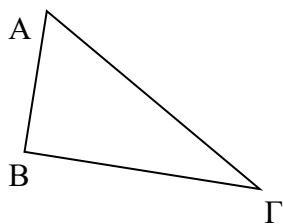
15. Φτιάξε τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του $\triangle A\hat{B}\Gamma$ που εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$ και στις προεκτάσεις των δύο άλλων πλευρών



16. Να αποδείξεις ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου $\triangle A\hat{B}\Gamma$ είναι 180°



17. Να αποδείξεις ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}$



18. Να φτιάξεις δύο οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες όπως και δύο αμβλείες με πλευρές κάθετες και να γράψεις την σχέση που έχουν

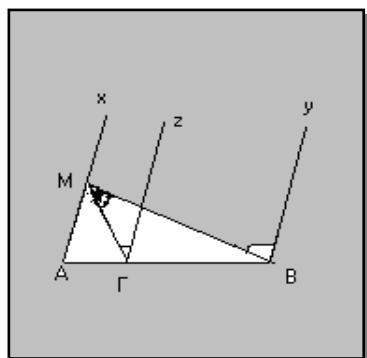
19. Να φτιάξεις μια οξεία και μια αμβλεία γωνία με πλευρές κάθετες και να γράψεις την σχέση που έχουν

20. Με τί ισούται το άθροισμα των γωνιών ενός n – γώνου ;

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Αν Γ είναι σημείο τμήματος AB και οι ημιευθείες Ax , By , Γz είναι παράλληλες και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του φορέα του AB , τότε για κάθε σημείο M της ημιευθείας Ax ισχύει : $B\hat{M}\Gamma = M\hat{B}y - M\hat{\Gamma}z$.

Λύση



Από το σχήμα έχω $B\hat{M}\Gamma = B\hat{M}A - \Gamma\hat{M}A$ ①

αλλά $B\hat{M}A = M\hat{B}y$ ② (σαν εντός εναλλάξ των παρ/λων Ax , By που τέμνονται από την MB)

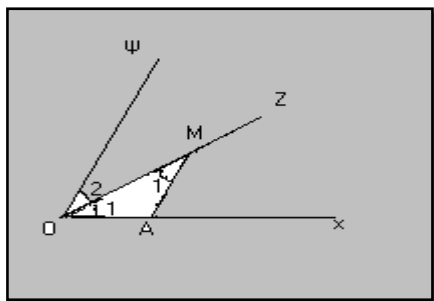
και $\Gamma\hat{M}A = M\hat{\Gamma}z$ ③ (σαν εντός εναλλάξ των παρ/λων Ax , Γz που τέμνονται από

την $M\Gamma$)

Από $\xrightarrow{\text{① ② ③}}$ $B\hat{M}\Gamma = M\hat{B}y - M\hat{\Gamma}z$

2. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της Oz και M τυχαίο σημείο της Oz . Επί της πλευράς Ox παίρνουμε το σημείο A τέτοιο, ώστε $OA=AM$, να αποδειχθεί ότι : $AM // Oy$.

Λύση



Αφού πήραμε το A έτσι ώστε $OA = AM \Rightarrow O\hat{A}M$ ισοσκελές $\Rightarrow O\hat{1} = M\hat{1}$ ①

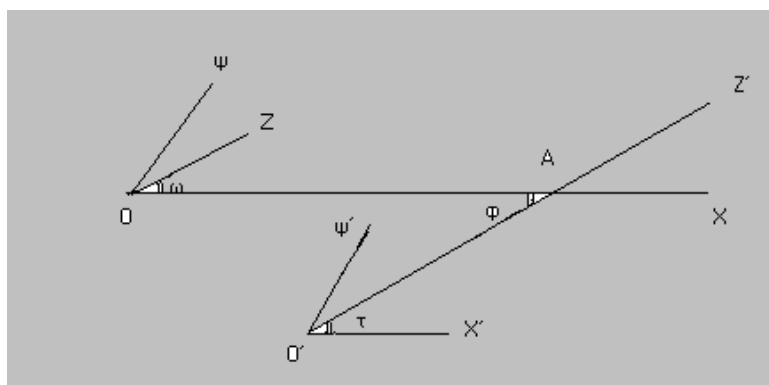
Αφού OZ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y \Rightarrow O\hat{1} = O\hat{2}$ ②

$\xrightarrow{\text{① ②}}$

$\hat{M}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow AM // Oy$ γιατί τεμνόμενες από την OM σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

- 3. Δίνονται οι οξείες γωνίες $\chi\hat{O}\Psi$ και $\chi'\hat{O}'\Psi'$ με πλευρές παράλληλες. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών αυτών είναι παράλληλες.**

Λύση

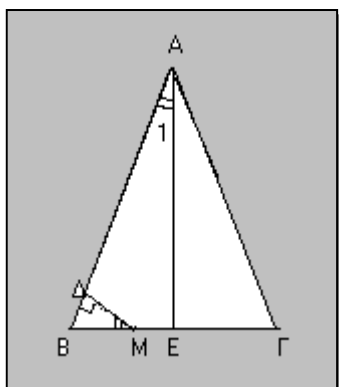


Έστω οι οξείες $\chi\hat{O}\gamma, \chi'\hat{O}'\gamma'$ με πλευρές παρ/λες και οι διχοτόμοι του $OZ, O'Z'$ που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι παρ/λες. Προεκτείνουμε την $O'Z'$ μέχρι να τμήσει την Ox έστω στο A . Τότε $\hat{\tau} = \hat{\phi}$ **1** (σαν εντός εναλλάξ των παρ/λων $Ox, O'x$ που τέμνονται από την $O'Z'$)

Επειδή $\hat{O} = \hat{O}'$ (σαν οξείες με πλευρές παρ/λες) $\Rightarrow \frac{\hat{O}}{2} = \frac{\hat{O}'}{2} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\tau}$ **2**

1 2 $\Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\phi} \Rightarrow OZ // O'Z'$ γιατί τεμνόμενες από την Ox σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες

- 4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M τυχαίο σημείο της βάσης του $B\Gamma$. Αν Δ η προβολή του M στην AB , να αποδείξετε ότι : $\Delta\hat{M}B = \frac{\hat{A}}{2}$**



Λύση

φέρνουμε το ύψος AE του τριγώνου. Επειδή το ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο είναι και

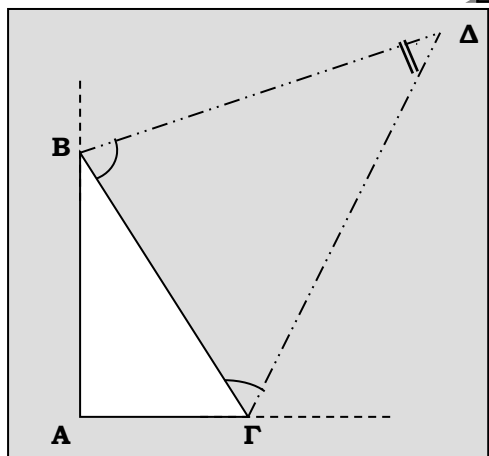
1

1

δικοτόμος είναι $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$. Οι γωνίες $\hat{A}_1, \hat{B}\hat{M}\Delta$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες άρα ίσες. Και λόγω $\Rightarrow \hat{B}\hat{M}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$

- 5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}_{εξ}$ και $\hat{\Gamma}_{εξ}$ τέμνονται στο Δ , να δείξετε ότι : $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$.**

Λύση



Από $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma$ έχουμε

$$\hat{\Delta} + \frac{\hat{B}_{εξ}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{2} = 180^\circ$$

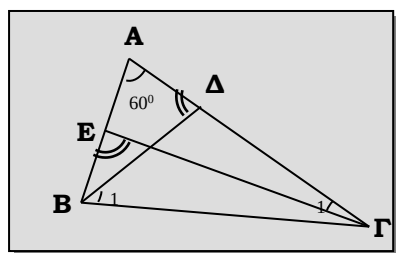
$$\Rightarrow \hat{\Delta} + \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{\Delta} + \frac{90 + \hat{\Gamma} + 90 + \hat{B}}{2} = 180^\circ$$

Αλλά $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ άρα

$$\hat{\Delta} + \frac{270}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Delta} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

- 6. Τριγώνου $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση με 60° και $B\Delta$, ΓE είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αυτού. Να δείξετε ότι $\hat{B}\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}\hat{E}B$**



Λύση

Η $\hat{\Gamma}\hat{E}B$ είναι εξωτερική στο $\hat{A}\hat{E}\Gamma \Rightarrow$

$$\hat{\Gamma}\hat{E}B = \hat{A} + \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{E}B = 60^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad \textcircled{1}$$

η $\hat{B}\hat{\Delta}A$ είναι εξωτερική στο $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma \Rightarrow$

$$\hat{B}\hat{\Delta}A = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B}\hat{\Delta}A = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} \quad \textcircled{2}$$

Για να είναι λοιπόν οι δύο γωνίες ίσες πρέπει να ισχύει

$$60 + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 120 + \hat{\Gamma} = \hat{B} + 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 120 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$$

που πράγματι ισχύει αφού $\hat{A} = 60^\circ$

- 7. Οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, αν δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο, που έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.**

Λύση

Από το τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε :

$$\hat{K} + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \quad (1)$$

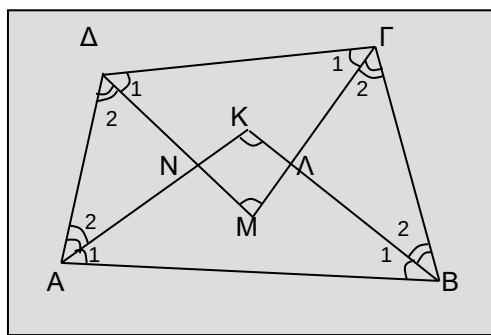
Από το τρίγωνο ΜΓΔ έχουμε :

$$\hat{M} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

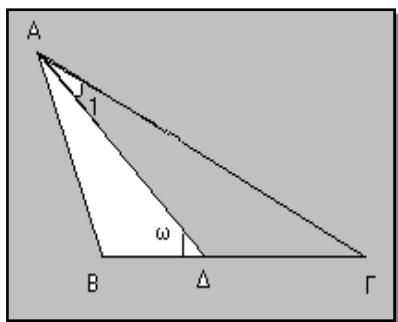
$$\hat{K} + \hat{M} + (\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1) = 180^\circ + 180^\circ \Rightarrow \hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$$

(διότι από το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ$)



- 8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ σχηματίζει με τη ΒΓ γωνία 45° .**

Λύση



Να προσέξουμε ότι φτιάξαμε αμβλυγώνιο τρίγωνο γιατί αφού $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ$

Η ω σαν εξωτερική στο $\hat{A}_1\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι

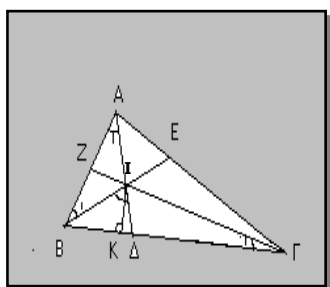
$$\omega = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 \Rightarrow \omega = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} \quad \text{①}$$

Από το $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ όμως είναι $\hat{\omega} = 180^\circ - \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2}$ ②

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{① ②}} 2\hat{\omega} &= \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} + 180^\circ - \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 2\hat{\omega} = 180^\circ - (\hat{B} - \hat{\Gamma}) \\ &\Rightarrow 2\hat{\omega} = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \hat{\omega} = 45^\circ \end{aligned}$$

9. Τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε τις διχοτόμους του AD , BE και ΓZ οι οποίες τέμνονται στο I . Από το I φέρνουμε την $IK \perp B\Gamma$, να δείξετε ότι: $B\hat{I}\Delta = \Gamma\hat{I}K$.

Λύση



Η $B\hat{I}\Delta$ είναι εξωτερική στο $A\hat{I}B \Rightarrow B\hat{I}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{B}_1$

$$\Rightarrow B\hat{I}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \quad \text{①}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\hat{I}K$ είναι

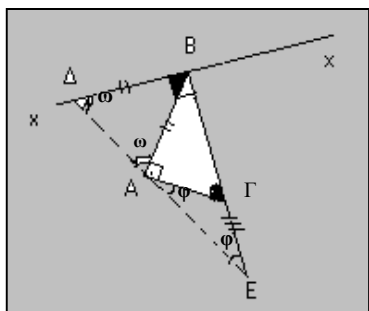
$$\Gamma\hat{I}K = 90^\circ - \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \Gamma\hat{I}K = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad \text{②}$$

Από ①, ② για να είναι ίσες οι γωνίες πρέπει

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ \text{ που ισχύει}$$

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε την $Bx \perp B\Gamma$ και η οποία να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η $B\Gamma$ και η κορυφή A . Επί της Bx παίρνουμε το σημείο Δ έτσι ώστε $B\Delta = AB$. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ και παίρνουμε τμήμα $\Gamma E = A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι :
- α) Τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά και
β) $\Delta\hat{B}A = 2\hat{E}$.

Λύση



α) Για να αποδείξω ότι τα Δ , A , E είναι συνευθειακά θα αποδείξω ότι $\Delta\hat{A}E = 180^\circ$
Αφού $B\Delta = BA$ (υπόθεση)

$$\Rightarrow A\hat{B}\Delta \text{ ισοσκελές} \Rightarrow B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A = \omega$$

Επειδή $\Gamma A = \Gamma E$ (υποθ) $\Rightarrow A\hat{\Gamma}E$ ισοσκελές

$\Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{G}\hat{E}A = \varphi$ από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle BE\hat{A}$ είναι
 $\omega + \varphi = 90^\circ$. Άρα $\hat{\Delta}\hat{A}E = \omega + 90 + \varphi = 90 + 90 = 180$

β) Είναι $\hat{\Delta}\hat{B}A = \hat{\Gamma}$ ¹ (σαν οξείες με πλευρές κάθετες)

Η $\hat{\Gamma}$ σαν εξωτερική στο $\triangle A\hat{G}E$ είναι $\hat{\Gamma} = \varphi + \varphi = 2\varphi = 2\hat{E}$ ²

Από ¹ ² $\hat{\Delta}\hat{B}A = 2\hat{E}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα σημεία A, B και τις ημιευθείες $Ax // By$ που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ε . Αν M είναι σημείο της ζώνης των παραλλήλων ημιευθειών Ax και By , να δείξετε ότι : $\hat{A}MB = \hat{M}Ax + \hat{M}By$

2. Δίνονται οι οξείες γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}'y'$ που οι πλευρές τους είναι κάθετες μία προς μία. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι τους τέμνονται κάθετα.

3 Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διχοτόμοι τριγώνου ΑΒΓ, να δειχτεί ότι $\hat{A}\hat{D}B + \hat{B}\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{Z}A = 270^\circ$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ αυτού. Από το Γ φέρνουμε τυχαία ημιευθεία Γχ και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ=ΓΑ και ΓΕ=ΓΒ. Να δειχτεί ότι $BE \perp AD$.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από την κορυφή A φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση $B\Gamma$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν την ε στα σημεία K και Λ , ναδειχθεί ότι $K\Lambda = AB + A\Gamma$.

6. Δίνεται μια γωνία $\kappa\hat{O}\gamma$ και Oz η διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ της Oz . Φέρνουμε την $\Gamma A \perp O\kappa$ και την $AB \perp O\gamma$. Να αποδειχθεί ότι $A\Gamma = A\Delta$ όπου Δ είναι το σημείο τομής των $O\Gamma$ και AB .

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρνουμε παράλληλη στην $A\Gamma$ η οποία τέμνει την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ στο Δ και την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$ στο E . Να αποδειχθεί ότι $BD = BE$.

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Θεωρούμε σημείο Δ του $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $\Gamma\Delta = B\Delta$. Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι κάθετη στη $B\Delta$.
