

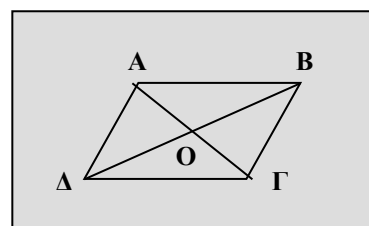
# ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

1. Θα ξέρεις τι λέμε παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, τετράγωνο, τραπέζιο (Σελ 97, 100, 101, 102, 112)

2. Θα ξέρεις ότι κάθε παρ/μο έχει 3 ιδιότητες

**α. Απέναντι πλευρές ίσες δηλ.**  $\begin{pmatrix} AB = \Gamma\Delta \\ AD = B\Gamma \end{pmatrix}$

η απόδειξη προκύπτει από την σύγκριση των τριγώνων  $\hat{A}\hat{B}\Delta$ ,  $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$



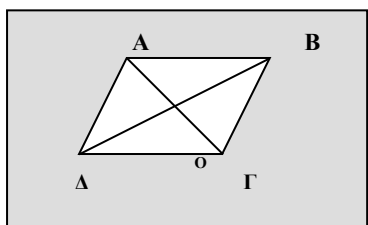
**β. Απέναντι γωνίες ίσες δηλ.**  $\begin{pmatrix} \hat{A} = \hat{\Gamma} \\ \hat{B} = \hat{\Delta} \end{pmatrix}$

Η απόδειξη για το  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$  προκύπτει από τη σύγκριση των ίδιων τριγώνων για το  $\hat{B} = \hat{\Delta}$  από τη σύγκριση των  $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ ,  $\hat{A}\hat{B}\Gamma$

**γ. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται δηλ.**  $\begin{pmatrix} OA = O\Gamma \\ OB = O\Delta \end{pmatrix}$

Η απόδειξη προκύπτει από την σύγκριση των  $\hat{A}\hat{O}B$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$

3. Θα ξέρεις ότι για να αποδείξεις ότι ένα τετράπλευρο είναι παρ/μο πρέπει να αποδείξεις μία από τις τέσσερις παρακάτω προτάσεις



**α) Οι απέναντι πλευρές είναι ανά δύο ίσες**

(Σύγκριση των  $\hat{A}\hat{B}\Delta$ ,  $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$ )

**β) Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παρ/λες**

(Σύγκριση των  $\hat{A}\hat{B}\Delta$ ,  $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$ )

**γ) Διαγώνιοι διχοτομούνται**

(Σύγκριση των  $\hat{A}\hat{O}B$ ,  $\hat{\Gamma}\hat{O}\Delta$ )

**δ. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες**

(θα γράψεις προσεκτικά την απόδειξη όπως θα την κάνει ο καθηγητής σου στον πίνακα και θα την μάθεις πολύ καλά γιατί μπαίνει συχνά θέμα)

---



---



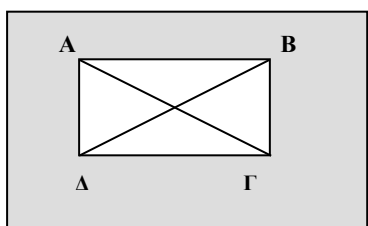
---



---

- 4.** Θα ξέρεις ότι το ορθογώνιο παρ/μο έχει 1 επιπλέον ιδιότητα από τα υπόλοιπα παρ/μα ότι δηλ

**οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παρ/μου είναι ίσες (δηλ  $ΑΓ=ΒΔ$ )**



(Η απόδειξη προκύπτει από τη σύγκριση των  $\triangle A\hat{B}\Delta$ ,  $\triangle A\hat{\Delta}\Gamma$ )

- 5.** Θα ξέρεις ότι για να είναι ένα τετράγωνο ορθογώνιο αρκεί να ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις

**i. Να είναι παρ/μο και να έχει μία ορθή γωνία**



**Ορισμός**

**ii. Να είναι παρ/μο και να έχει ίσες διαγώνιες**



**Ίδια απόδειξη με το 4**

**iii. Να έχει τρεις ορθές γωνίες**



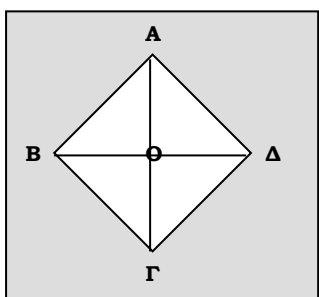
**Αφού τότε αναγκαστικά και η 4<sup>η</sup> θα είναι ορθή**

**iv. Όλες οι γωνίες του να είναι ίσες**



**Αφού τότε αναγκαστικά θα είναι όλες ορθές**

6. Θα ξέρεις ότι ο ρόμβος έχει δύο επιπλέον ιδιότητες διαφορετικές από τα υπόλοιπα παρ/μα



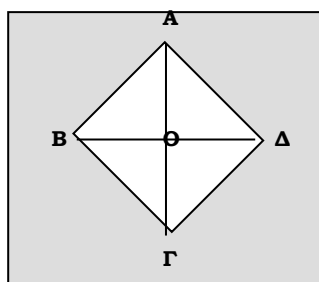
α) Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα

( $\hat{A}B\Delta$  ισοσκ,  $AO$  διάμεσος  $\Rightarrow AO$  ύψος  $\Rightarrow AG \perp BD$ )

β) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του

( $\hat{A}B\Delta$  ισοσκ,  $AO$  διάμεσος  $\Rightarrow AO$  διχοτόμος  $\Rightarrow AG$  διχοτόμος της  $\hat{A}$ )

7. Θα ξέρεις ότι για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος αρκεί να ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις)



i. Να έχει όλες τις πλευρές ίσες

Ορισμός

ii. Να είναι παρ/μο και να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

Τότε θα είναι και οι υπόλοιπες αφού οι απέναντι πλευρές είναι ίσες

iii. Να είναι παρ/μο και οι διαγώνιες να τέμνονται κάθετα

Στο  $AB\Delta$  η  $AO$  διάμεσος και ύψος  $\Rightarrow AB\Delta$  ισοσκ  $\Rightarrow AB=AD \Rightarrow AB\Gamma\Delta$  ρόμβος σαν παρ/μο με 2 διαδοχικές πλευρές ίσες

iv. Να είναι παρ/μο και μία διαγώνιος να διχοτομεί μία γωνία

Στο  $AB\Delta$  η  $AO$  διάμεσος και διχοτόμος  $\Rightarrow AB\Delta$  ισοσκ  $\Rightarrow AB=AD \Rightarrow AB\Gamma\Delta$  ρόμβος σαν παρ/μο με 2 διαδοχικές πλευρές ίσες

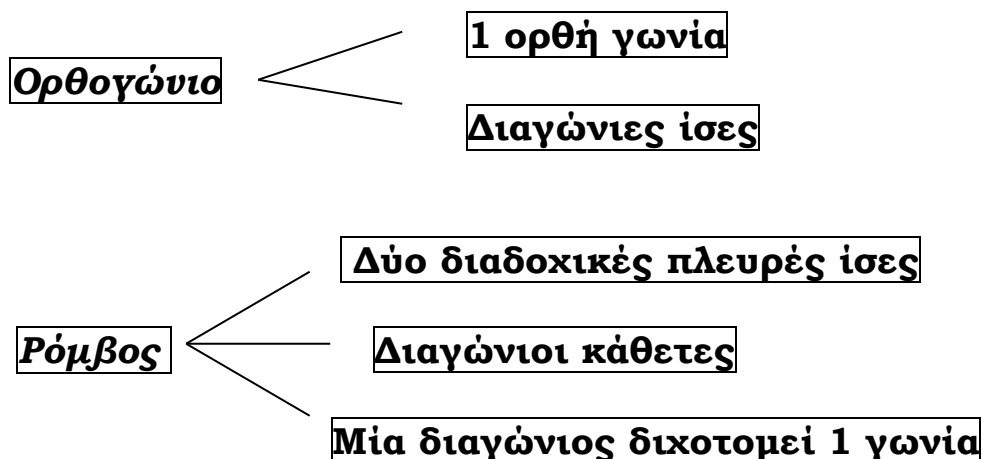
**8**

Θα ξέρεις ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες παρ/μου, ορθογώνιου, ρόμβου δηλαδή

- i. Όλες οι πλευρές ίσες
- ii. Όλες οι γωνίες ορθές
- iii. Οι διαγώνιες ίσες και κάθετες και διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του

**9.**

Θα ξέρεις ότι για να αποδείξεις ότι ένα παρ/μο είναι τετράγωνο πρέπει να αποδείξεις ότι είναι και ορθογώνιο και ρόμβος



Να συνδυάσεις τις δύο προϋποθέσεις για να είναι ένα παρ/μο ορθογώνιο, με τις 3 για να είναι ρόμβος και να φτιάξεις 6 προϋποθέσεις για να είναι ένα παρ/μο τετράγωνο

# ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι παρ/μο

**Λύση**

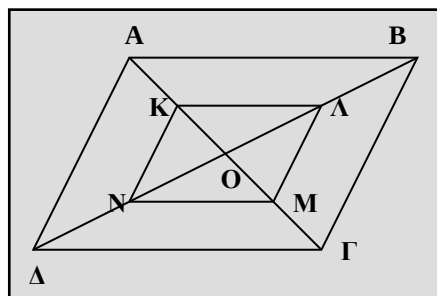
Αφού ΑΒΓΔ παρ/μο  $\Rightarrow$  οι διαγώνιοι διχ/νται  $\Rightarrow$  ΟΑ = ΟΓ  $\Rightarrow \frac{ΟΑ}{2} = \frac{ΟΓ}{2} \Rightarrow$

ΟΚ = ΟΜ 1 (αφού Κ, Μ μέσα)

Όμοια βρίσκω ότι και ΟΛ = ΟΝ 2

1 2

$\Rightarrow$  ΚΛΜΝ παρ/μο γιατί οι διαγώνιοί του διχ/νται



2. Από τις κορυφές Α και Γ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τις ΑΚ  $\perp$  ΒΔ και ΓΛ  $\perp$  ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

**Λύση**

Τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΛΒΓ έχουν

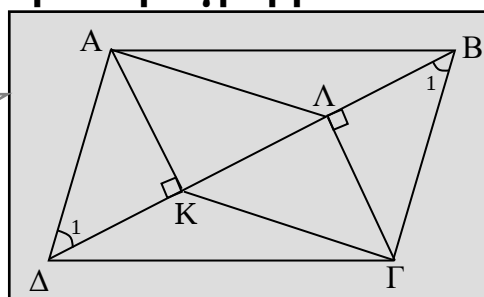
i)  $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$

ii) ΑΔ = ΒΓ (απέναντι πλευρές παρ/μου)

iii)  $\hat{\Lambda}_1 = \hat{B}_1$  (ως εντός εναλλάξ των ΑΔ // ΒΓ)

$\Rightarrow \triangle KAD = \triangle LBG$  (είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες).

$\Rightarrow AK = GL$  **(1)**



Επειδή είναι και παράλληλες (τέμνουν κάθετα την ΒΔ), το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παρα/μο, διότι έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παραλ/λες.

**3. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία (ε) // ΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.**

**Λύση**

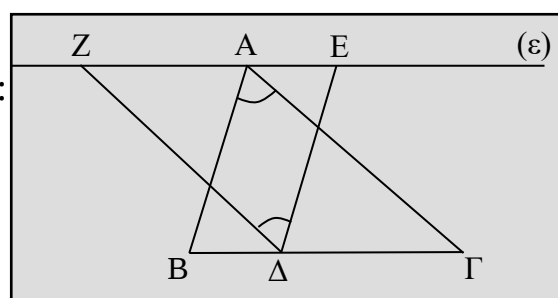
Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παρ/μο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παρ/λες οπότε,  $\Delta E = AB$  **(1)**

Για τον ίδιο λόγο και το ΑΓΔΖ είναι παρ/μο  
 $\Rightarrow \Delta Z = AG$  **(2)**

Τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ έχουν:

- i)  $\Delta E = AB$  (λόγω της **(1)**)
- ii)  $\hat{\Delta} = \hat{A}$  (πλευρές παρ/λες)
- iii)  $\Delta Z = AG$  (λόγω της **(2)**)

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{\Delta E Z} = \overset{\Delta}{A B \Gamma} \text{ (Π - Γ - Π)}$$



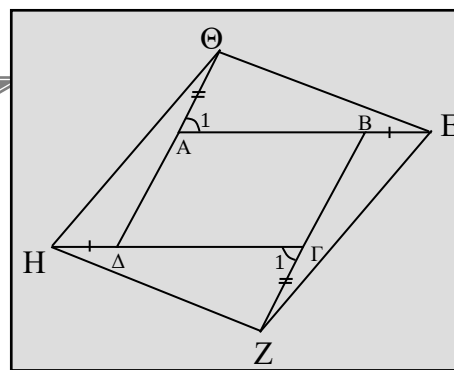
**4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ έτσι ώστε ΒΕ = ΔΗ και ΓΖ = ΑΘ. Ναδειχθεί ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.**

**Λύση**

Τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΓΗΖ έχουν:

- i)  $A\Theta = \Gamma Z$  (Υ)
- ii)  $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$  (οξείες γωνίες με πλευρές παρ/μες)

$$\text{iii) } AE = \Gamma H \left( \begin{array}{l} \text{γιατί } AB = \Gamma D \\ \text{γιατί } BE = DH \end{array} \right)$$



$$\stackrel{(+)}{\Rightarrow} AB + BE = \Gamma\Delta + \Delta H \Rightarrow AE = \Gamma H$$

και  $BE = \Delta H$

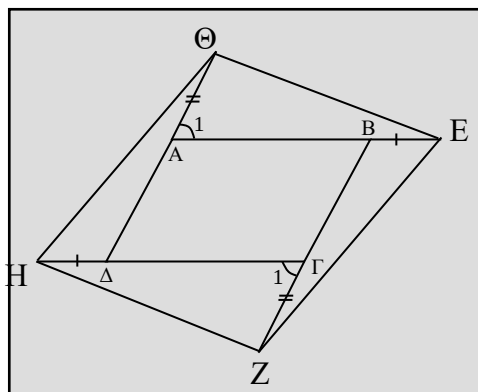
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{\angle} \Theta E = \overset{\Delta}{\angle} \Gamma H Z \text{ (}\Pi-\Gamma-\Pi\text{)} \Rightarrow \Theta E = HZ \text{ (1)}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\overset{\Delta}{\angle} B E Z = \overset{\Delta}{\angle} H \Theta \Rightarrow E Z = \Theta H \text{ (2)}$$

Απο τις σχ. (1) και (2)

$\Rightarrow$  το  $EZH\Theta$  είναι παρ/μο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

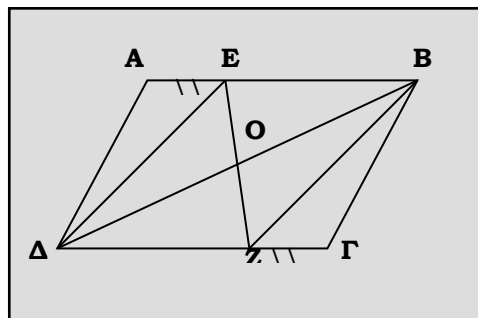


**5.** Στις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $AE = \Gamma Z$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $EZ$  διέρχεται από το κέντρο του παρ/μου

**Λύση**

Ξέρουμε ότι κέντρο του παρ/μου είναι το μέσον της διαγωνίου  $B\Delta$ .

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι η  $EZ$  διέρχεται από το κέντρο του παρ/μου αρκεί να αποδείξουμε ότι το σημείο  $O$  που τέμνει την  $B\Delta$  είναι το μέσον της

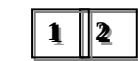


Είναι  $AB = \Gamma\Delta$  (απέναντι πλευρές παρ/μων)

$(-) AE = \Gamma Z$  (υπόθεση)

$$AB - AE = \Gamma\Delta - \Gamma Z \Rightarrow BE = \Delta Z \quad \boxed{1}$$

αλλά είναι και  $BE \parallel \Delta Z$  2 αφού  $AB\Gamma\Delta$  παρ/μο



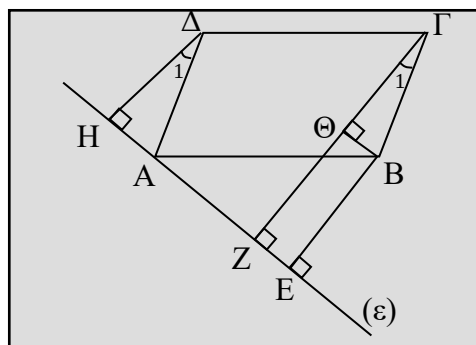
$BE\Delta Z$  παρ/μο γιατί 2 απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παρ/λες  $\Rightarrow$  οι διαγώνιοι διχοτομούνται  $\Rightarrow$  Η  $EZ$

διέρχεται από το μέσον  $O$  της  $BD$  δηλαδή από το κέντρο του παρ/μου  $ABGD$ )

**6.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABGD$  και από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon)$  που αφήνει το παραλληλόγραμμο προς το αυτό μέρος. Αν  $E, Z, H$  είναι οι προβολές των  $B, \Gamma, \Delta$  αντίστοιχα στην  $(\varepsilon)$ , ναδειχθεί ότι  $\Gamma Z = BE + \Delta H$ .

**Λύση**

**Φέρουμε την  $B\Theta \perp \Gamma Z$** , οπότε σχηματίζεται το τετράπλευρο  $B\Theta ZE$ , το οποίο είναι ορθογώνιο γιατί έχει  $\hat{Z} = \hat{E} = \hat{\Theta} = 90^\circ$



Από το ορθογώνιο  $BEZ\Theta$  παίρνουμε:  $\boxed{BE = \Theta Z} \quad (1)$

Τα τρίγωνα  $\triangle H\hat{A}\Delta$  και  $\triangle \Theta\hat{B}\Gamma$  έχουν:

i)  $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$

ii)  $A\Delta = B\Gamma$  (απέναντι πλευρές παρ/μου)

iii)  $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$  (οξείες γωνίες με πλευρές παρ/λες).

$\Rightarrow \triangle H\hat{A}\Delta = \triangle \Theta\hat{B}\Gamma$  (Είναι ορθογώνια και έχουν τις υποτείνουσες τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες)  $\Rightarrow \boxed{\Delta H = \Gamma\Theta} \quad (2)$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)**  $\Rightarrow BE + \Delta H = \Theta Z + \Gamma\Theta = \Gamma Z$ .

**7.** Έστω  $\Delta$  και  $E$  οι προβολές της κορυφής  $B$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  στις διχοτόμους της γωνίας  $\hat{A}$ .

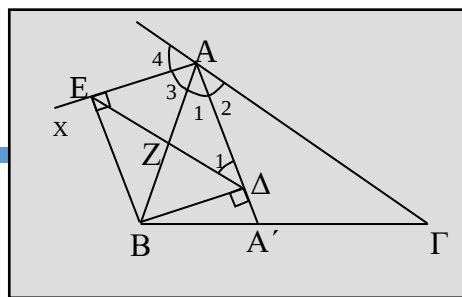
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο με κορυφές  $A, \Delta, B, E$  είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία  $\Delta E$  διέρχεται από το μέσο της πλευράς  $AB$  και είναι παράλληλη προς την πλευρά  $A\Gamma$ .

**Λύση**

**α)** Επειδή οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{A}_{εξ}$



είναι εφεξής και παραπληρωματικές  
οι διχοτόμοι τους τέμνονται κάθετα,  
δηλαδή  $AA' \perp AX$

Επειδή  $\hat{\Delta}AE = \hat{A}EB = \hat{A}LB = 90^\circ$  το  
τετράπλευρο  $A\Delta BE$  είναι ορθογώνιο

**β)** Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του  
ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται  
οπότε:  $ZA = ZB = Z\Delta = ZE$ .

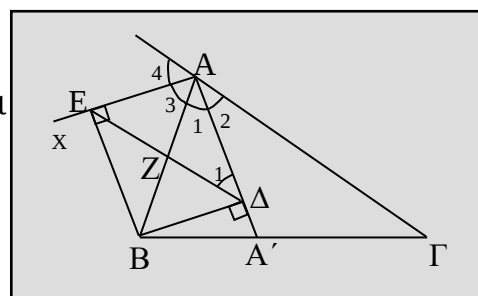
Επειδή  $ZA = Z\Delta$  το τρίγωνο  $Z\Delta\Delta$   
είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$  **(1)**

Από την υπόθεση έχουμε και  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)**

$$\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 \Leftrightarrow \Delta E \parallel A\Gamma$$

γιατί τέμνονται από την  $A\Delta$  και σχηματίζουν τις εντός  
εναλλάξ γωνίες ίσες.



**8.** Έξω από ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  κατασκευάζουμε τα  
ισόπλευρα τρίγωνα  $ABE$ ,  $B\Gamma Z$ ,  $\Gamma\Delta H$  και  $\Delta A\Theta$ . Να  
αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι  
τετράγωνο.

**Λύση**

Τα τρίγωνα  $A\Theta E$  και  $B\hat{E}Z$  έχουν:

i)  $AE = BE = a$  (= πλευρά τετραγ.)

ii)  $A\Theta = BZ = a$

iii)  $\hat{\Theta}AE = \hat{E}BZ = 150^\circ$  (\*)

$$\Rightarrow \hat{A}\Theta E = \hat{B}\hat{E}Z \quad (\Pi - \Gamma - \Pi)$$

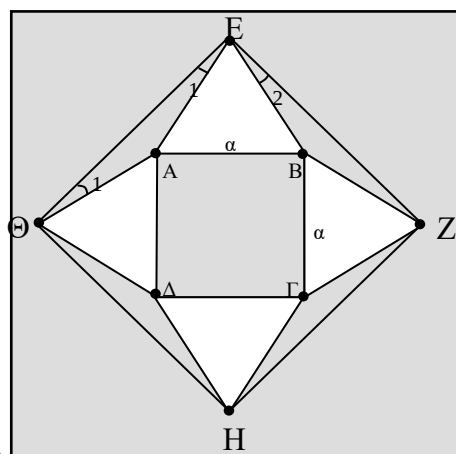
Άρα  $\Theta E = EZ$  **(1)**

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:  $\hat{B}\hat{E}Z = \hat{\Gamma}H Z = \hat{\Delta}\Theta H \Rightarrow EZ = ZH = H\Theta$  **(2)**

Από τις σχ. **(1)** και **(2)** παίρνουμε ότι το τετράπλευρο  
 $EZH\Theta$  είναι ρόμβος (έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες).

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $A\Theta E$

$$\Rightarrow \hat{\Theta}AE + \hat{E}_1 + \hat{\Theta}_1 = 180^\circ \Rightarrow 150^\circ + 2\hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$



Όμοια αποδεικνύεται ότι:  $\hat{E}_2 = 15^\circ$

Επειδή  $\Theta\hat{E}Z = \hat{E}_1 + \hat{AEB} + \hat{E}_2 = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$ ,

ο ρόμβος ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο αφού έχει μια ορθή γωνία

$\left( * \text{ Είναι } \Theta\hat{A}E + \Theta\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B + B\hat{A}E = 360^\circ \Leftrightarrow \Theta\hat{A}E + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \right)$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

**1. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου, αν και μόνο αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές.**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

**2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ. Από το Α η παράλληλη προς την ΕΓ τέμνει την πλευρά ΔΓ στο Θ. Να αποδειχθεί ότι ΒΘ // ΔΕ.**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

3. Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα  $O$  και  $K$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Θεωρούμε ένα σημείο  $B$  του ενός κύκλου και ένα σημείο  $\Gamma$  του άλλου έτσι ώστε η γωνία  $BA\Gamma$  να είναι ορθή. Να αποδείξετε ότι το  $OB\Gamma K$  είναι παραλληλόγραμμο.

4. Ευθεία  $(\varepsilon)$ , διέρχεται από το κέντρο  $O$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , και τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $H$  και  $\Theta$  αντίστοιχα και τις ευθείες  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $E\Theta = ZH$ .

-----

-----

-----

-----

**5. Έστω  $E$  το μέσο της πλευράς  $AB$  ενός παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$ , για το οποίο ισχύει  $AB = 2BΓ$ . Να αποδείξετε ότι: α) Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα  $ΓΕ$  και την πλευρά  $ΓΔ$ . β) Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  τέμνονται σε σημείο της  $ΓΔ$ .**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

**6. Σε ένα παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  είναι  $AB = 2BΓ$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $AB$ , ναδειχθεί ότι  $ΓΜ \perp ΔΜ$ .**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

- 7. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

-----

- 8. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα δύο κάθετων διαμέτρων του σχηματίζουν τετράγωνο.**

-----

-----

-----

-----

-----

-----

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**9. Οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου αν δεν συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο με διαγώνιους παράλληλες στις πλευρές του αρχικού.**

-----

-----

-----

-----

-----

[illegible]

[illegible]