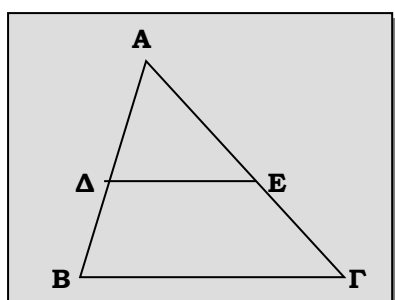


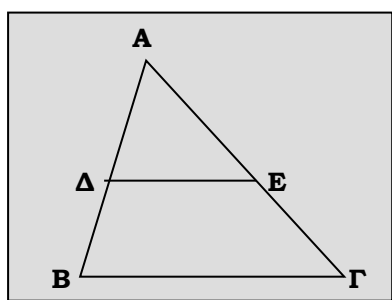
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

1. Θα ξέρεις ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



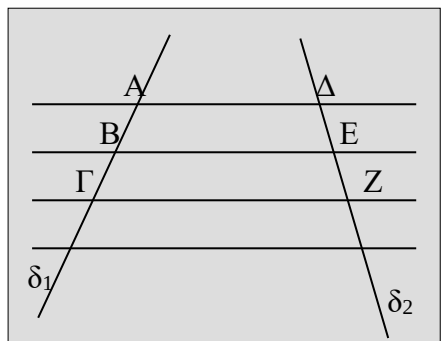
Δηλαδή αν Δ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ τότε
 $ΔΕ // ΒΓ$ και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$
(θα μάθεις πολύ καλά την απόδειξη στην σελ. 104)

2. Θα ξέρεις ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



Δηλαδή αν Δ το μέσον της ΑΒ και
 $ΔΕ // ΒΓ$ τότε το Ε είναι μέσο της
ΑΓ

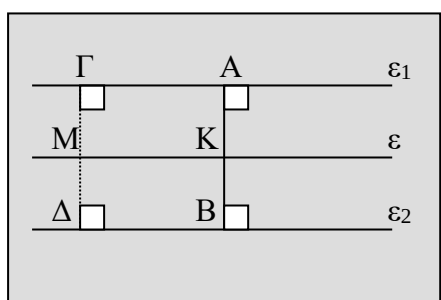
3. Θα ξέρεις ότι αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



Δηλαδή αν $AB=BΓ$

Τότε είναι και $ΔE=EZ$

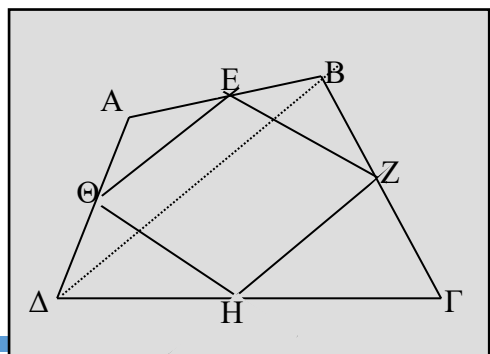
4. Θα ξέρεις τι είναι η μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών και τι ιδιότητα έχει. (σελ 105-106)



Η (ε) είναι μεσοπαράλληλη των $ε_1$ και $ε_2$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι μία ευθεία $ε$ παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες. Η (ε) λέγεται μεσοπαράλληλος των $ε_1$ και $ε_2$

5. Θα ξέρεις να αποδεικνύεις ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

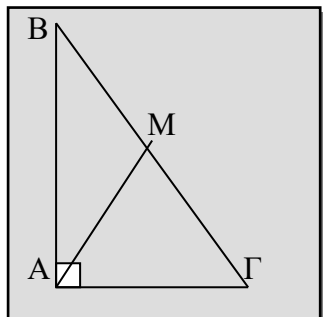


Δηλαδή E, Z, H, Θ, μέσα των πλευρών του ABΓΔ

$\Rightarrow$ EZHΘ παραλληλόγραμμο

(εφαρμογή 1^η σελ 106)

6. Θα ξέρεις ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

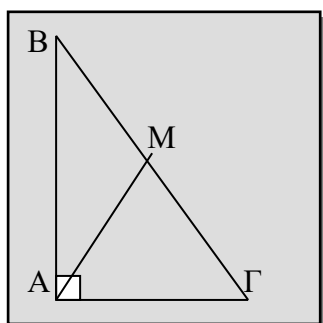


Δηλαδή αν AM διάμεσος τότε

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}$$

(θα μάθεις **ΑΡΙΣΤΑ** την απόδειξη στη σελ 109)

7. Θα ξέρεις ότι ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος, ότι δηλαδή αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



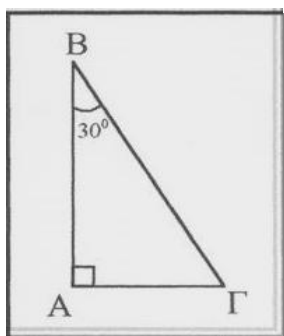
Δηλαδή αν AM διάμεσος

$$\text{και } AM = \frac{B\Gamma}{2} \text{ τότε το } \triangle AB\Gamma$$

είναι ορθογώνιο.

(**ΑΡΙΣΤΑ** την απόδειξη σελ 109)

8. Θα ξέρεις ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.



Δηλαδή αν $\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο και

$$\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \text{ και αντίστροφα.}$$

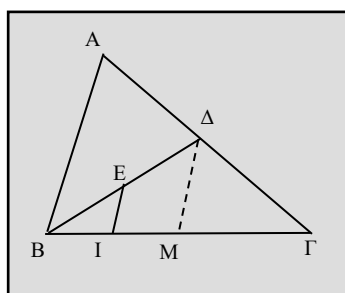
$$\text{Αν } \triangle AB\Gamma \text{ ορθογώνιο και } A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

(ΑΡΙΣΤΑ την απόδειξη σελ 110)

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο I της πλευράς του $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{1}{4}B\Gamma$. Αν E είναι το μέσο της διαμέσου $B\Delta$, ναδειχθεί ότι $EI \parallel \frac{AB}{4}$.

Λύση



Φέρουμε τη ΔM όπου M το μέσο της $B\Gamma$.

Επειδή το ευθ. τμήμα ΔM συνδέει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παρ/λο προς την τρίτη πλευρά του AB και ισούται με το μισό της, δηλαδή:

$$\Delta M \parallel \frac{AB}{2} \quad (1)$$

Από την υπόθεση έχουμε $BI = \frac{1}{4}B\Gamma = \frac{1}{4} \cdot 2BM = \frac{BM}{2} \Leftrightarrow BI = IM$

Στο τρίγωνο $B\Delta M$ το ευθύγραμμο τμήμα EI συνδέει τα μέσα των πλευρών του $B\Delta$ και BM αντίστοιχα, οπότε έχουμε:

$$EI \parallel \frac{\Delta M}{2} \quad (2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} EI \parallel \frac{\frac{AB}{2}}{2} \Leftrightarrow EI \parallel \frac{AB}{4}$$

2. Δίνεται ορθ. τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$ αυτού και τα ευθ. τμήματα $\Delta E, \Delta Z$ και EZ όπου E, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντιστοίχως.

Να αποδείξετε ότι :

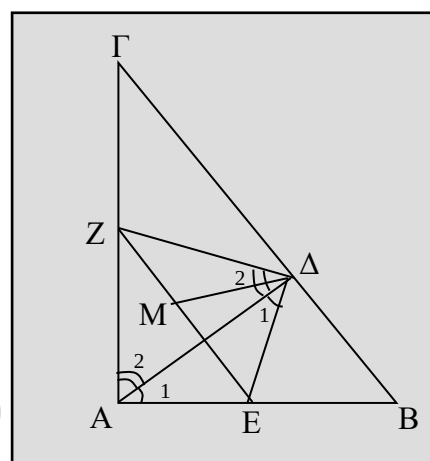
- α) $\hat{E}\hat{\Delta}Z = 90^\circ$
 β) Η περίμετρος του $AB\Gamma$ είναι διπλάσια της περιμέτρου του ΔEZ , και
 γ) $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου M είναι το μέσο της ZE .

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB η ΔE είναι η διάμεσός του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε έχουμε:

$$\Delta E = \frac{AB}{2} \quad (A) \Leftrightarrow \Delta E = AE$$

$$\Leftrightarrow \text{το } \triangle E\hat{A}\Delta \text{ είναι ισοσκελές} \Leftrightarrow \boxed{\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1} \quad (1)$$



Όμοια από το ορθογ. τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ παίρνουμε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ (B)

(διάμεσος προς την υποτείνουσα) $\Leftrightarrow$ το τρίγ. $Z\hat{A}\Delta$ είναι ισοσκελές $\Leftrightarrow \boxed{\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2} \quad (2)$

$$\text{Απο τις σχ. (1) και (2)} \Rightarrow \overset{(+)}{\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Leftrightarrow \underset{\downarrow}{\hat{E}\hat{\Delta}Z} = \underset{\downarrow}{\hat{A}} = 90^\circ.$$

β) Επειδή το ευθ.τμήμα EZ συνδέει τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παρ/λο προς την τρίτη πλευρά του $B\Gamma$ και ισούται με το μισό της, δηλαδή

$$\boxed{EZ = // \frac{B\Gamma}{2}} \quad (\Gamma).$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Pi_{\triangle EZ} &= EZ + \Delta E + \Delta Z \stackrel{(A),(B),(Γ)}{=} \frac{B\Gamma}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} \\ &= \frac{B\Gamma + AB + A\Gamma}{2} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Pi_{AB\Gamma} = 2\Pi_{\triangle EZ} \end{aligned}$$

γ) Στο ορθογ. τριγ. ΔΕΖ η ΔΜ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε έχουμε:

$$\Delta M = \frac{ZE}{2} \stackrel{(r)}{=} \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

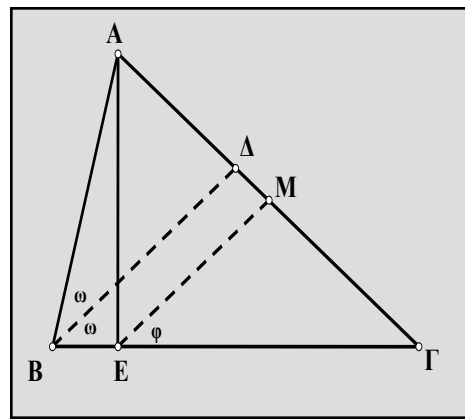
- 3. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, την διχοτόμο του ΒΔ και το μέσο Μ της πλευράς του ΑΓ. Η παράλληλη από το Μ προς την ΒΔ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι: $AE \perp BG$.**

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = 2\hat{\Gamma} \text{ (Υποθεση)} \\ \hat{B} = 2\hat{\omega} \text{ (αφου ΒΔ διχ)} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\hat{\Gamma} = 2\hat{\omega} \Rightarrow \boxed{\hat{\Gamma} = \hat{\omega}} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\omega}, \hat{\phi} \text{ εντός εκτός και επί τ' αυτά} \\ \text{των παρ/λων} \\ \text{ΒΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΒΓ} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\hat{\omega} = \hat{\phi}} \quad (2)$$

$$\text{Από } \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \hat{\Gamma} = \hat{\phi} \Rightarrow \overset{\Delta}{ME\Gamma} \text{ ισοσκ} \Rightarrow ME = M\Gamma \Rightarrow ME = \frac{A\Gamma}{2}$$



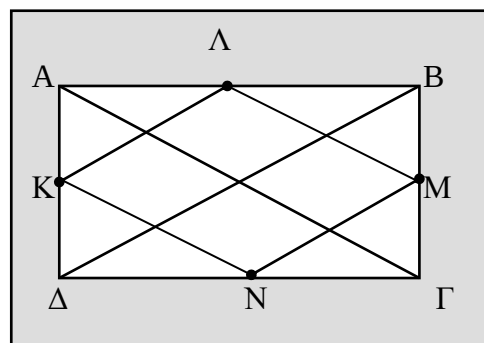
Άρα, η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΑΕΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ στην οποία αντιστοιχεί, συνεπώς το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο στο Ε. Έτσι, έχουμε: $\hat{AEG} = 90^\circ$ και συνεπώς $AE \perp BG$.

4. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου, και αντίστροφα.

Λύση

Ευθύ

Κατ' αρχήν σύμφωνα με την Εφαρμογή σελ. 106 έχουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι παρ/μο (Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παρ/μου)



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Υπάρχει πιθανότητα ο καθηγητής σου να θέλει κάθε φορά να το αποδεικνύεις.

Για να αποδείξω τώρα ότι ΚΛΜΝ είναι ρόμβος αρκεί να αποδείξω ότι έχει τις διαδοχικές του πλευρές ΚΛ και ΛΜ ίσες

$$\text{Στο } \triangle A\hat{B}B \text{ τα } K, L \text{ μέσα} \Rightarrow KL = \frac{BD}{2} \quad (1)$$

$$\text{Στο } \triangle A\hat{B}C \text{ τα } L, M \text{ μέσα} \Rightarrow LM = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Αλλά στο ορθογώνιο παρ/μο οι διαγώνιοι είναι ίσες δηλ $BD = AC$ (3)

(1),(2),(3)

$$\Rightarrow KL = LM \Rightarrow \text{ΚΛΜΝ ρομβος}$$

Αντίστροφο

Έστω ΚΛΜΝ ρόμβος $\Rightarrow KL = LM$ τότε λόγω $\xrightarrow{(1), (2)} \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow$
 ΑΒΓΔ ορθογώνιο παρ/μο γιατί είναι παρ/μο με ίσες διαγώνιες

5. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (το οποίο δεν έχει παράλληλες πλευρές) και Κ,Λ είναι τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του ΑΒΓΔ, τότε να αποδειχτεί ότι το ΚΝΛΜ είναι παραλ/μο.

Λύση

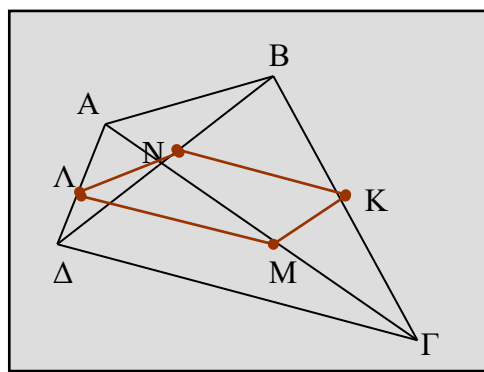
Στο $\triangle ΒΔΓ$ τα Ν, Κ μέσα $\Rightarrow NK \parallel \Gamma\Delta$ (1)

$$\text{και } NK = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (2)$$

Στο $\triangle ΑΔΓ$ τα Λ, Μ μέσα $\Rightarrow \Lambda M \parallel \Gamma\Delta$ (3)

$$\text{και } \Lambda M = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Απο } \begin{array}{l} \xRightarrow{(1),(3)} NK \parallel \Lambda M \\ \xRightarrow{(2),(4)} \Rightarrow NK = \Lambda M \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΚΚΜΛ παρ/μο γιατί έχει δύο απέναντι} \\ \text{πλευρές παρ/λες και ίσες} \end{array}$$

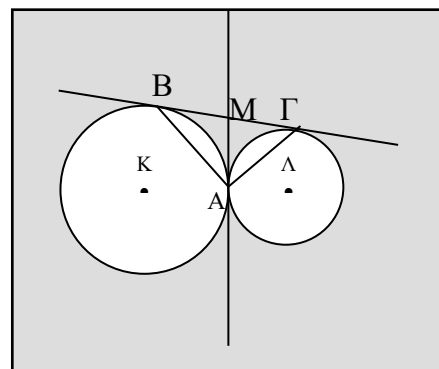


6. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α και μια ευθεία εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ. Να δείξετε ότι: $\widehat{ΒΑΓ} = 90^\circ$

Λύση

Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη στο Α των δύο κύκλων και έστω ότι αυτή τέμνει την ΒΓ στο Μ τότε

$$\left. \begin{array}{l} MA=MB \text{ (εφαπτόμενα τμήματα από το } M \text{ στον κύκλο } (K, R)) \\ MA=MG \text{ (εφαπτόμενα τμήματα από το } M \text{ στον κύκλο } (\Lambda, \rho)) \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$$MA=MB=MG \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \text{ μεσον του } B\Gamma \text{ και} \\ MA = \frac{B\Gamma}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle B\hat{A}\Gamma \text{ ορθογώνιο γιατί η}$$

διάμεσος του $\triangle AM$ είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί $\Rightarrow \angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ φέρουμε τις $AD \perp B\Gamma$, $DE \perp AB$ και $DZ \perp A\Gamma$ (D, E, Z σημεία των $B\Gamma, AB, A\Gamma$ αντίστοιχα). Αν η διάμεσος AM του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ τέμνει τη DZ στο σημείο H , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

κατ' αρχήν είναι $BE \parallel HZ$ **(1)** σαν κάθετες στην ίδια ευθεία

Τα ορθογώνια $\triangle BE\hat{D}$ και $\triangle A\hat{Z}H$ έχουν

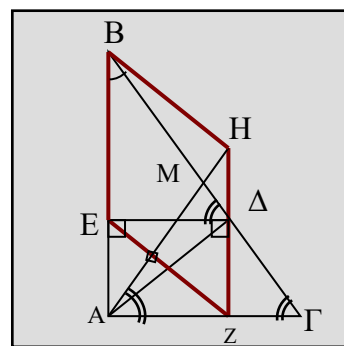
1) $DE = AZ$ (απέναντι πλευρές του ορθογωνίου παρ/μου $\triangle EAZ$)

2) $\angle B\hat{D}E = \angle H\hat{A}Z$ (γιατί $\angle B\hat{D}E = \hat{\Gamma}$ σαν εντός εκτός κι επι τα αυτά και γιατί

$\angle H\hat{A}Z = \hat{\Gamma}$ γιατί στο ορθογώνιο $\triangle AB\hat{\Gamma}$ η AM είναι διάμεσος $\Rightarrow AM = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow AM = MG \Rightarrow \triangle AM\hat{\Gamma}$ ισοσκελές.

$\Rightarrow \triangle BE\hat{D} = \triangle A\hat{Z}H \Rightarrow BE = HZ$ **(2)**

Από **(1),(2)** $\Rightarrow BEZH$ παρ/μο γιατί δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου και αντίστροφα.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διχοτόμος της ορθής γωνίας διχοτομεί και τη γωνία του ύψους και της διαμέσου που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ φέρουμε τα ύψη AD και BE . Αν M είναι το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MDE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

4. Οι γωνίες B και Δ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθές. Αν K, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ να δείξετε ότι $K\Lambda \perp B\Delta$

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ , E , Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB αντίστοιχα. Φέρνουμε την $E\Theta \perp A\Gamma$, την $ZK \perp AB$ και παίρνουμε τμήματα $E\Theta = \frac{A\Gamma}{2}$ και $ZK = \frac{AB}{2}$.
Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα $\Delta E\Theta$ και ΔZK είναι ίσα.

6. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A}B\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Αν E είναι η προβολή του Δ στην $A\Gamma$, να δειχθεί ότι $AE = \frac{A\Gamma}{4}$

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο, με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ν.

Ναδειχθεί ότι $MN = \frac{\beta}{3}$

8. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχουμε $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^\circ$. Αν φέρουμε το ύψος του ΑΔ και στην προέκταση της ΑΒ πάρουμε τμήμα ΒΕ=ΒΔ, τότε η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.
