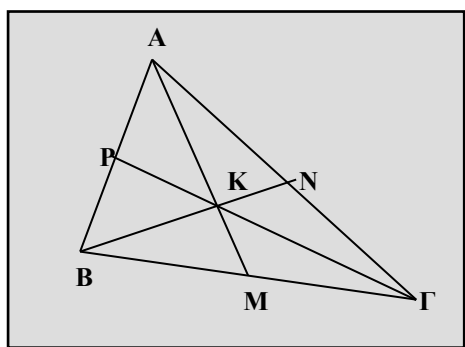


ΚΕΝΤΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Θα ξέρεις ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο που το λέμε ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ του τριγώνου και απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου



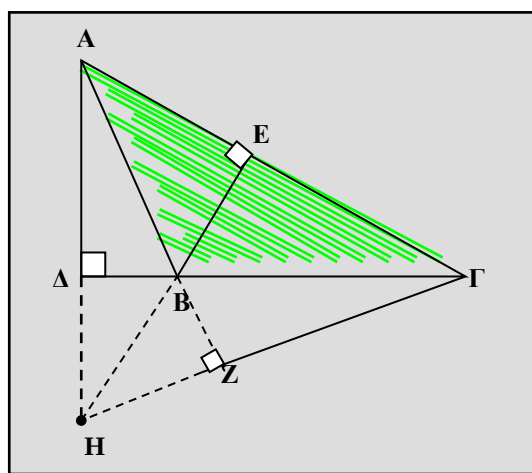
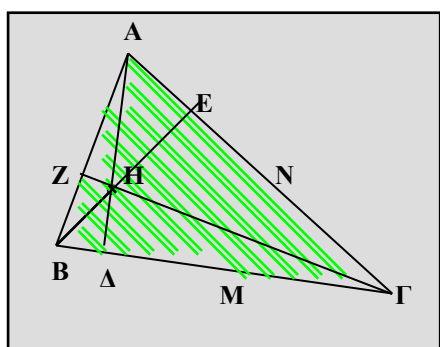
Δηλαδή οι διάμεσοι AM, BN, ΓΡ διέρχονται από το ίδιο σημείο K για το οποίο ισχύουν

$$KA = \frac{2}{3} AM, KB = \frac{2}{3} BN, KG = \frac{2}{3} GP$$

$$KM = \frac{1}{3} AM, KN = \frac{1}{3} BN, KP = \frac{1}{3} GP$$

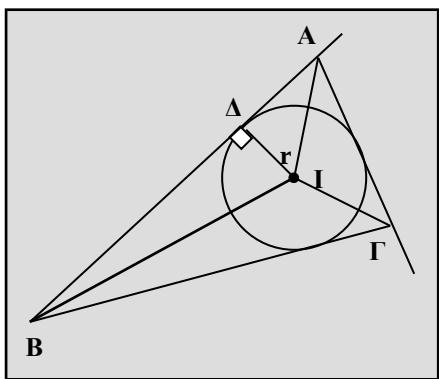
Άρα και $KA=2KM$, $KB=2KN$, $KG=2KP$

2. Θα ξέρεις ότι τα ύψη τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο που το λέμε ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ του τριγώνου



Να προσέξουμε ότι στο αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο H είναι έξω από το τρίγωνο

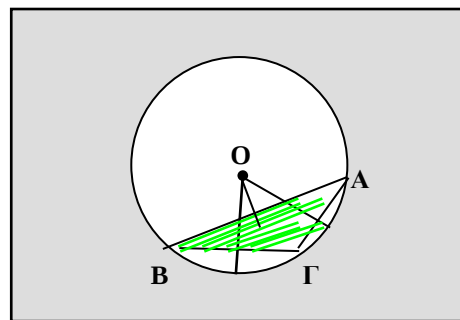
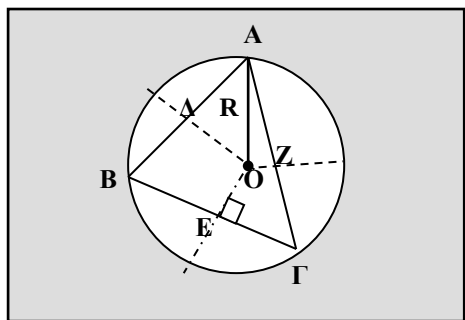
3. Θα ξέρεις ότι οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο I που το λέμε ΕΓΚΕΝΤΡΟ του τριγώνου. Το I είναι κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο, ακτίνα του κύκλου αυτού είναι η απόστασή του από οποιαδήποτε πλευρά



AI, BI, GI διχοτόμοι

$IA=r$ (ακτίνα εγγ. Κύκλου)

4. Θα ξέρεις ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο O που το λέμε ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ του τριγώνου. Το O είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο, ακτίνα του κύκλου αυτού είναι η απόστασή του από οποιαδήποτε κορυφή του



OA, OE, OZ μεσοκάθετοι

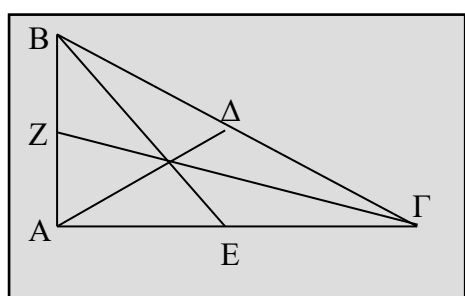
$OA=R$ (ακτίνα του περιγ. Κύκλου)

Να προσέξουμε ότι αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο το περίκεντρο είναι έξω από το τρίγωνο

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Οι διάμεσοι $ΑΔ$, $ΒΕ$, $ΓΖ$ ορθογωνίου τριγώνου τέμνονται σε σημεία $Κ$. Αν $ΚΔ = \frac{5}{3}$, $ΒΕ = \sqrt{52}$, $ΓΚ = \frac{2\sqrt{73}}{3}$ να βρεθούν οι $ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΚΒ$, $ΓΖ$.

Λύση



Το $Κ$ σαν σημείο τομής των διαμέσων είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου

$$\text{Άρα } ΚΔ = \frac{1}{3} ΑΔ \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{3} ΑΔ \Rightarrow ΑΔ = 5$$

Επειδή η $ΑΔ$ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι

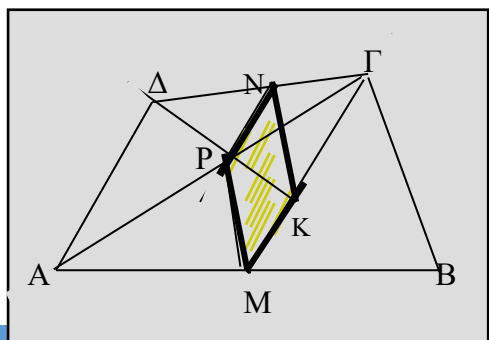
$$ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow 5 = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΒΓ = 10$$

$$\text{Είναι } ΚΒ = \frac{2}{3} ΒΕ \Rightarrow ΚΒ = \frac{2}{3} \sqrt{52}$$

$$\text{Είναι } ΓΚ = \frac{2}{3} ΓΖ \Rightarrow \frac{2\sqrt{73}}{3} = \frac{2}{3} ΓΖ \Rightarrow ΓΖ = \sqrt{73}$$

2. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, $Κ$ βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$ και $Μ$, $Ν$, $Ρ$ τα μέσα των τμημάτων $ΑΒ$, $ΓΔ$ και $ΚΔ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $ΜΡ \parallel ΝΚ$.

Λύση



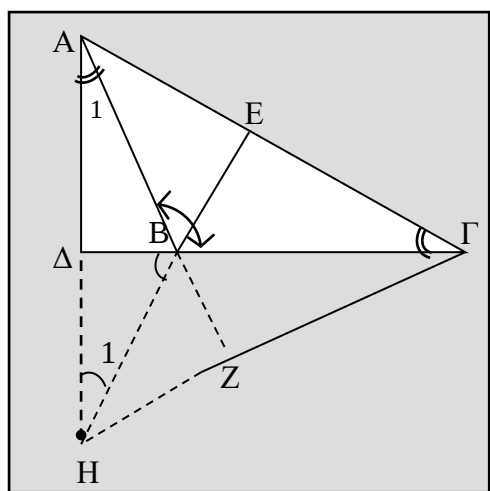
Θα δείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΜΡΝΚ$ είναι παραλληλόγραμμο.

- Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΜ είναι η διάμεσος του και αφού Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου ισχύει: $MK = \frac{ΓΚ}{2}$ (1)
- Στο τρίγωνο ΔΚΓ αφού Ν μέσο ΔΓ και Ρ μέσο ΔΚ είναι $NP // = \frac{ΓΚ}{2}$ (2)
- Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $MK // = NP$ συνεπώς το τετράπλευρο ΜΡΝΚ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Άρα $MP // NK$.

3. Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΒΓ είναι ίσα.

Λύση



$$\text{Είναι } \hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ (Υ) \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} + 90^\circ (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{\Delta} + \hat{A}_1 \text{ (γιατί είναι εξωτερική)} \\ &= 90^\circ + \hat{A}_1 (2) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\hat{\Gamma} + 90^\circ = 90^\circ + \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 (3)$$

Είναι όμως και: $\hat{\Gamma} = \hat{H}_1$ (4) (οξείες με πλευρές κάθετες)

Από τις σχέσεις (3) και (4) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{H}_1 \Rightarrow$ το τρίγωνο ΒΑΗ είναι ισοσκελές, άρα το ύψος του ΒΔ είναι διχοτόμος και διάμεσός του. Άρα η ΓΒΔ είναι η μεσοκάθετός του ΑΗ, οπότε :

$$BA = BH (5) \text{ και } \Gamma A = \Gamma H (6)$$

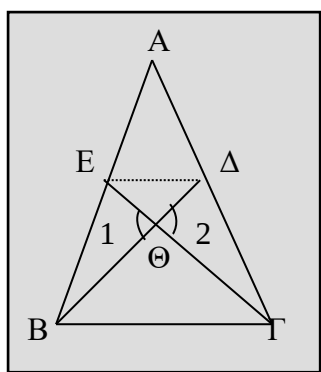
Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΓBH έχουν:

- i) $B\Gamma = B\Gamma$ (κοινή)
- ii) $BA = BH$ (λόγω της σχ.(5))
- iii) $\Gamma A = \Gamma H$ (λόγω της σχ. (6))

$$\Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle \Gamma BH \text{ (Π-Π-Π)}$$

4. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο διαμέσους ίσες, να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.

Λύση



Έστω Θ το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε:

Τα τρίγωνα ΘBE και $\Theta \Gamma \Delta$ έχουν:

- i) $\Theta B = \Theta \Gamma$ (είναι τα $\frac{2}{3}$ των ίσων διαμέσων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα)

- ii) $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$ (ως κατακορυφήν)

- iii) $\Theta E = \Theta \Delta$ (είναι το $\frac{1}{3}$ των ίσων διαμέσων ΓE και $B\Delta$ αντίστοιχα)

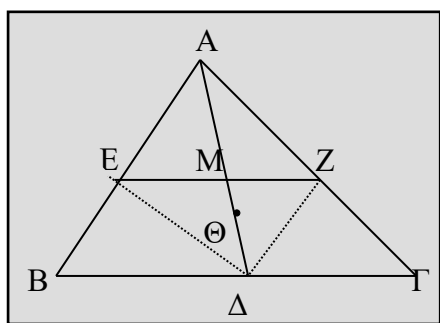
$$\Rightarrow \triangle BE\Theta = \triangle \Gamma\Theta\Delta \text{ (Π-Γ-Π)}$$

Άρα $BE = \Gamma\Delta \Leftrightarrow 2BE = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow AB = A\Gamma$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

5. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών AB και AG τριγώνου ABΓ διχοτομεί τη διάμεσο ΑΔ.
 β) Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα, των πλευρών του τριγώνου ABΓ έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το ABΓ.

Λύση



α) Γνωρίζουμε ότι $EZ \parallel B\Gamma$.

Στο τρίγωνο ABΔ από το μέσο E της πλευράς AB έχουμε φέρει την $EM \parallel B\Delta$, οπότε το M είναι μέσο της ΑΔ, δηλαδή $MA = M\Delta$

β) Έστω Θ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΔΕΖ, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\Theta\Delta &= \frac{2}{3} M\Delta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} A\Delta \quad (\text{διοτι: } M\Delta = MA = \frac{1}{2} A\Delta) \\ &= \frac{1}{3} A\Delta\end{aligned}$$

Άρα το Θ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ, γιατί είναι σημείο της διαμέσου ΑΔ και απέχει από το Δ το $\frac{1}{3}$ της ΑΔ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Αν E, Z είναι τα μέσα των απέναντι πλευρών $AB, ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ να αποδείξετε ότι $ΔΕ, ΒΖ$ χωρίζουν την διαγώνιο $ΑΓ$ σε τρία ίσα τμήματα.

2. Αν E, Z τα μέσα διαδοχικών πλευρών $AB, ΒΓ$ παραλληλογράμμου, τότε οι $ΔΕ, ΔΖ$ χωρίζουν την διαγώνιο $ΑΓ$ σε τρία ίσα μέρη.

- 3.** Αν H είναι το ορθόκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$, να βρεθούν τα ορθόκεντρα των τριγώνων $BH\Gamma$, $\Gamma H A$ και AHB .

- 4.** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις διαμέσους του AD , BE , ΓZ που τέμνονται στο Θ . Αν K , Λ , M , είναι τα μέσα των ΘA , ΘB , $\Theta \Gamma$ να δείξετε ότι το $K\Lambda M$ είναι ίσο με το $E\Delta Z$.

5. Από ένα σημείο E της διαγωνίου BD τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε την κάθετη στην πλευρά AB και από το B την κάθετη στην ευθεία AE . Να αποδείξετε ότι αυτές οι δύο κάθετες τέμνονται σε σημείο της διαγωνίου AG .

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal dashed lines spaced evenly down the page. A single solid vertical line runs parallel to the right edge, creating a narrow margin. The lines are light gray and extend across the entire width of the page.

6. Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και E το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Αν η AE τέμνει τη $B\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι $AZ=2EZ$ και $OD=3OZ$.

[illegible]

