

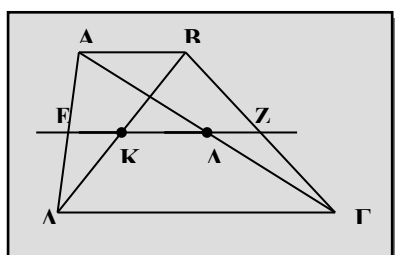
ΤΡΑΠΕΖΙΑ

1. Θα ξέρεις ότι η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

(προσοχή στην απόδειξη σελ. 112)

2. Θα ξέρεις ότι η διάμεσος EZ τραπεζίου ABΓΔ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

(προσοχή στην απόδειξη σελ. 113)

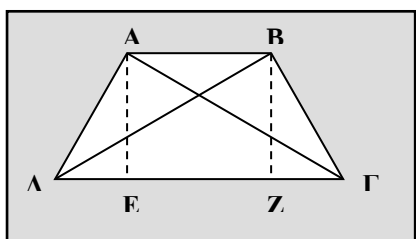


$$\begin{aligned} \text{Δηλ. EZ διάμεσος} &\Rightarrow EZ \parallel AB, \Gamma\Delta \text{ και } EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \\ K, \Lambda \text{ μέσα διαγωνίων} &\Rightarrow K\Lambda \parallel AB, \Gamma\Delta \text{ και } K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \end{aligned}$$

3. Θα ξέρεις τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου

4. Θα ξέρεις ότι το ισοσκελές τραπέζιο έχει τις δύο παρακάτω ιδιότητες

- I) Οι γωνίες που προσκείνται στην βάση είναι ίσες
II) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες



Δηλ ABΓΔ ισοσκ

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}, \hat{A} = \hat{B} \left(\text{προκύπτει από την σύγκριση των } \triangle \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}, \triangle \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma} \right) \\ B\hat{\Delta} = A\hat{\Gamma} \left(\text{προκύπτει από την σύγκριση των } \triangle A\hat{\Delta}\hat{\Gamma}, \triangle B\hat{\Delta}\hat{\Gamma} \right) \end{cases}$$

5. Θα ξέρεις ότι για να αποδείξεις ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές αρκεί να αποδείξεις

- ή i) ότι οι γωνίες που προσκείνται σε μια βάση είναι ίσες
ή ii) ότι οι διαγώνιές του είναι ίσες

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , AG , $B\Gamma$, ναδειχθεί ότι το σχήμα ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

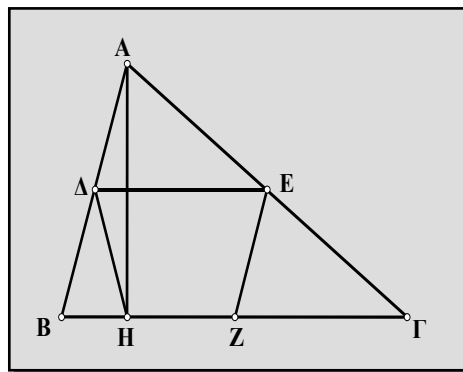
Λύση

Επειδή το τμήμα ΔE συνδέει τα μέσα των πλευρών AB και AG , θα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και το ΔEZH είναι τραπέζιο (γιατί οι πλευρές του ΔH και EZ δεν είναι παρ/λες, αφού παρ/λη από το Δ προς την EZ είναι η AB). Άρα αρκεί ν' αποδείξουμε ότι: $EZ = \Delta H$.

Πράγματι το τμήμα EZ συνδέει τα μέσα των

AG και GB οπότε $\boxed{ZE = \frac{AB}{2}}$ (1) Είναι όμως και $\boxed{H\Delta = \frac{AB}{2}}$ (2)

γιατί το $H\Delta$ η είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου AHB που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του. Άρα $\xrightarrow{\text{απο (1),(2)}} ZE = H\Delta$.



2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB > \Gamma\Delta$. Αν φέρουμε τα ύψη ΓE και ΔZ να αποδειχθεί ότι $BE = AZ = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2} = \frac{B - \beta}{2}$.

Λύση

Τα τρίγωνα $Z\Delta\Delta$ και $E\Gamma\Gamma$ έχουν:

i) $\hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$

ii) $\Delta\Delta = \Gamma\Gamma$ (αφού $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές)

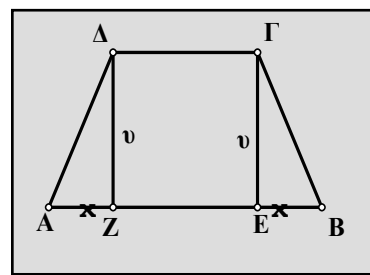
iii) $\Delta Z = \Gamma E$ (σαν αποστάσεις μεταξύ παρ/λων)

$\Rightarrow \Delta\Delta = \Gamma\Gamma$ (Είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες).

Άρα $AZ = EB = x$

τότε $x + ZE + x = B$ και επειδή από το ορθογώνιο παρ/μο

$\Delta ZE\Gamma$ είναι $ZE = \beta$ έχουμε $x + \beta + x = B \Leftrightarrow 2x = B - \beta \Leftrightarrow x = \frac{B - \beta}{2}$



- 3. Αν σ' ένα τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες του τραπέζιου τριχοτομούν τη διάμεσό του**

Λύση

MN διάμεσος τραπέζιου $\Rightarrow$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{2\Gamma\Delta + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3\Gamma\Delta}{2} \quad (1)$$

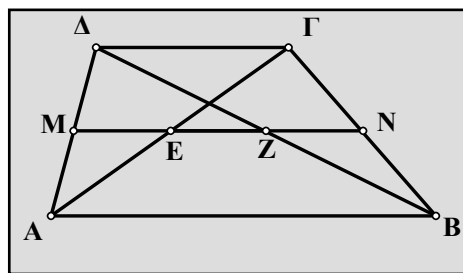
γιατί η διάμεσος τραπέζιου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων

Στο $\triangle \hat{A}\Gamma$ τα M, E μέσα $\Rightarrow ME = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (2)$

Στο $\triangle \hat{\Gamma}B$ τα Z, N μέσα $\Rightarrow ZN = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (3)$

τότε $EZ = MN - ME - ZN =$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow (1) & \downarrow (2) & \downarrow (3) \\ \frac{3\Gamma\Delta}{2} - \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} & (4) & \xRightarrow{(2),(3),(4)} ME = ZN = EZ \end{array}$$



- 4. Σ' ένα τραπέζιο ABΓΔ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του AΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν M είναι το μέσο της απέναντι πλευράς, να δείξετε ότι: $\hat{A}M\Delta = 90^\circ$.**

Λύση

Αν AB, ΔΓ είναι οι βάσεις του τραπέζιου και E το μέσο της AΔ, έχουμε: $EM = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \quad (1).$

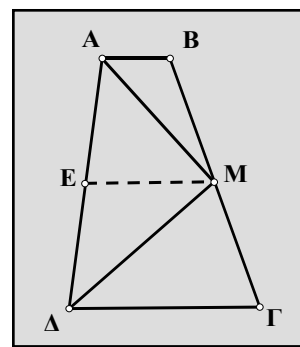
Από την υπόθεσή μας όμως

$A\Delta = BA + \Gamma\Delta$ η ισότητα (1) γράφεται:

$$EM = \frac{A\Delta}{2} \quad \text{δηλαδή το τρίγωνο } AM\Delta \text{ έχει μία}$$

διάμεσο ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί.

Έτσι το $\triangle AM\Delta$ είναι ορθογώνιο. Άρα $\hat{A}M\Delta = 90^\circ$.



- 5.** Η μεγαλύτερη βάση ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του που πρόσκεινται στη μικρότερη βάση τέμνονται σε σημείο της μεγαλύτερης βάσης.

Λύση

Για να αποδείξουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τραπεζίου τέμνονται πάνω στην $\Gamma\Delta$ εργαζόμαστε ως εξής:

Φέρνουμε τη διχοτόμο AE της γωνίας A (E σημείο της $\Gamma\Delta$) και στη συνέχεια τη BE . Αρκεί να δείξουμε ότι η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}$

Πράγματι έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \text{ (αφού } AE \text{ διχ)} \\ \hat{E}_1 &= \hat{A}_2 \text{ (εντός εναλλαξ)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow$$

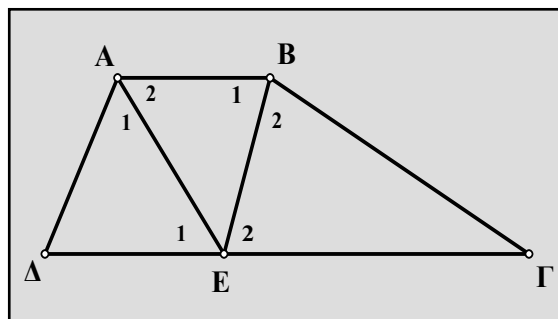
$$\Rightarrow \triangle A\hat{A}E \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \Delta E = A\Delta \quad (1)$$

τότε $\Delta\Gamma = A\Delta + B\Gamma$ (Υποθεση)

$$\Delta E = A\Delta \text{ (λογω 1)} \quad (-)$$

$$E\Gamma = B\Gamma \Rightarrow \triangle B\hat{B}\Gamma \text{ ισοσκελές} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_2 &= \hat{B}_2 \\ \hat{E}_2 &= \hat{B}_1 \text{ (εντός εναλλαξ)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow BE \text{ διχοτομος}$$



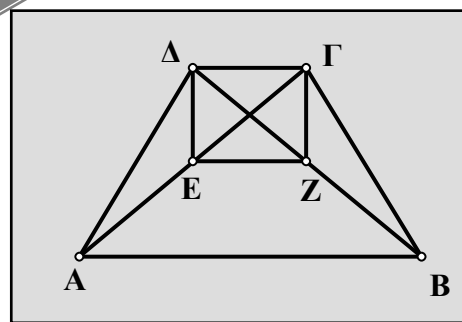
- 6.** Η βάση AB ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι τριπλάσια της $\Gamma\Delta$. Αν E, Z είναι τα μέσα των $A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχως, τότε το τετράπλευρο $EZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα EZ συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε

$$EZ = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2} = \frac{3\Gamma\Delta - \Gamma\Delta}{2} = \Gamma\Delta \quad (1)$$

$$\text{και } EZ \parallel \Gamma\Delta \quad (2)$$



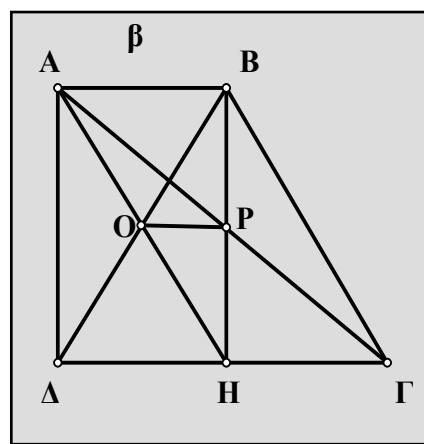
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$EZ \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow$ το $\Gamma\Delta EZ$ είναι παραλ/μο και επειδή έχει τις διαγώνιες του ΓE και ΔZ ίσες (είναι μισά των ίσων διαγωνίων $A\Gamma$, $B\Delta$ του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα) είναι ορθογώνιο.

**7. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ορθογώνιο στις κορυφές A και Δ , ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) του οποίου η βάση $\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της AB . Από την κορυφή του B φέρνουμε την $BH \perp \Gamma\Delta$, η οποία τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο P .
Να δείξετε ότι:**

α) $PB = PH$ και β) $OP = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$ όπου O

είναι το σημείο τομής των AH και $B\Delta$.



Λύση

α) $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow ABH\Delta$ ορθογώνιο παρ/μο

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta H = \beta & (1) \\ O \text{ μεσον της } AH \text{ αφού οι διαγ διχ/νται} & (2) \end{cases}$

$B = 2\beta$ (Υπόθεση)

$\Delta H = \beta$ (λόγω 1) (-)

$\Gamma H = \beta \Rightarrow AB\Gamma H$ παρ/μο γιατί δύο απέναντι πλευρές είναι παρ/λες και ίσες $\Rightarrow$ διαγ. Διχ/νται $\Rightarrow PB = PH$ και επιπλέον P μέσον της $A\Gamma$ (3)

β) Από (2), (3) στο $\triangle AH\Gamma$ τα O, P μέσα $\Rightarrow OP = \frac{1}{2}HG = \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{2} = \frac{B}{4}$.

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ όπου $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$.

Έστω Ε και Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα και Η το μέσο της ΓΕ. Να δείξετε ότι το ΑΒΗΖ είναι παρ/μο.

Λύση

Στο τραπέζιο ΑΕΓΔ το ευθυγρ. τμήμα ΖΗ είναι διάμεσος του, οπότε έχουμε

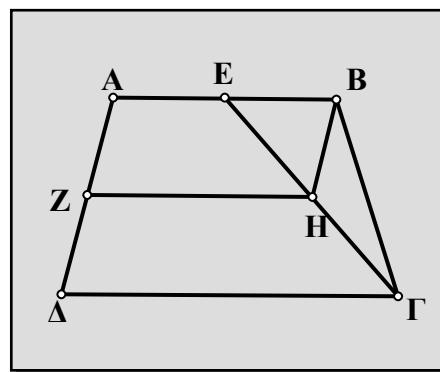
$$\left. \begin{array}{l} \text{και} \quad ZH = \frac{AE + \Gamma\Delta}{2} \\ ZH \parallel AE \end{array} \right\} \Leftrightarrow ZH = \frac{\frac{AB}{2} + \frac{3AB}{2}}{2}$$

$$\text{και} \quad ZH \parallel AB$$

$$(\text{γιατί} \quad AE = EB = \frac{AB}{2} \quad \text{και} \quad \Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB)$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} ZH = \frac{AB}{2} \\ \text{και} \quad ZH \parallel AB \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{το } ABZH \text{ είναι παραλ/μο γιατί δύο}$$

απέναντι πλευρές του είναι ίσες παράλληλες.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τραπέζιου είναι κορυφές ρόμβου, αν και μόνο αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

2. Θεωρούμε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\Delta\Gamma = 2AB$ και τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του $B\Delta$ και $A\Gamma$, αντίστοιχα. Οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ και $B\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο O . Καλούμε M το μέσο του τμήματος OA και N το μέσο του OB . Να δείξετε ότι το $MN\Lambda K$ είναι παρ/μο.

3. α) θεωρούμε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $AB < \Delta\Gamma$ και τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $\Delta\Gamma = 3AB$ να αποδείξετε ότι το $AB\Lambda K$ είναι παραλ/μο.

β) Αν το $AB\Lambda K$ είναι ορθογώνιο, δείξτε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $A\Delta = AB + \Delta\Gamma$ και το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$. Η ευθεία AM τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο E και η ευθεία ΔM τέμνει την AB στο Z . Να δείξετε ότι το $A\Delta E Z$ είναι ρόμβος.

5. Δίνεται σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος του AH και η διάμεσος του AM . Αν Δ και E τα συμμετρικά του A ως προς τα H και M αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- α) $AB = B\Delta = \Gamma E$ και
 β) Το $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

6. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και δεν τέμνει το τρίγωνο. Να αποδείξετε ότι το μέσο της $B\Gamma$ ισαπέχει από τις προβολές των B και Γ πάνω στην (ε) .

7. Θεωρούμε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$), το μέσο E της βάσεως του AB , το μέσο Z της πλευράς του $B\Gamma$ και το μέσο H του ευθ. τμήματος ΔE .

Να δείξετε ότι: αν το $ABZH$ παραλληλόγραμμο, τότε

$$\Delta\Gamma = \frac{3}{2} AB.$$

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και βρίσκουμε το συμμετρικό A' της κορυφής του A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A'\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
