

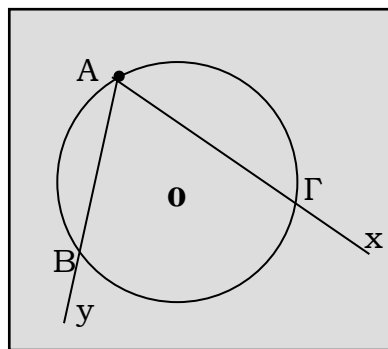
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ - ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

1.

α) Θα ξέρεις ότι εγγεγραμμένη λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Π.χ η $\hat{x}\hat{A}\psi$

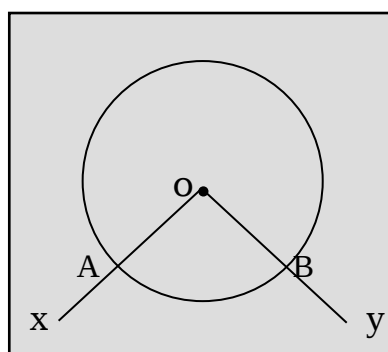
Το τόξο ΒΓ λέγεται αντίστοιχο τόξο της εγγεγραμμένης γωνίας.



β) Επίκεντρη λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναι το κέντρο O του κύκλου.

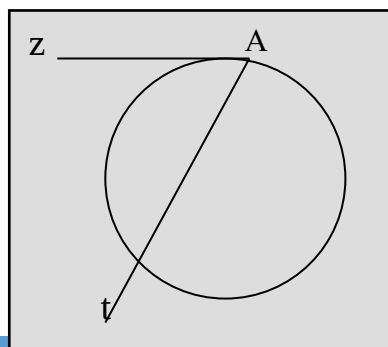
Π.χ

Η $\hat{x}\hat{O}\psi$ με αντίστοιχο τόξο AB



γ) Γωνία χορδής και εφαπτομένης λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου, η μια πλευρά της τέμνει τον κύκλο και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου.

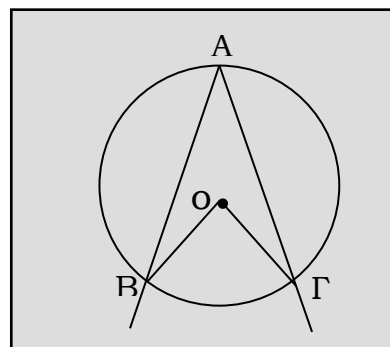
Π.χ η $\hat{z}\hat{A}t$



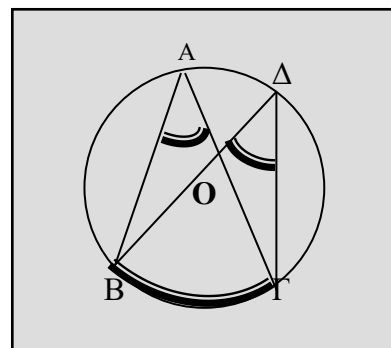
2.

Θα ξέρεις τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των παραπάνω γωνιών . Ότι δηλαδή:

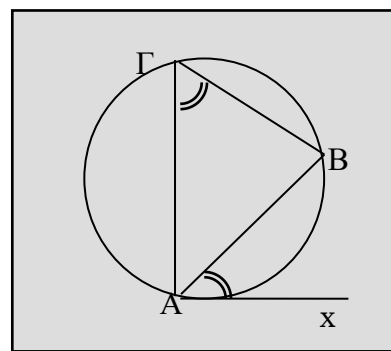
α) Αν έχουμε μια εγγεγραμμένη και μια επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο αντίστοιχο τόξο τότε η εγγεγραμμένη είναι το μισό της επίκεντρης δηλ $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{1}{2}\widehat{B\hat{O}\Gamma}$



β) Αν έχουμε δύο εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα τότε αυτές είναι ίσες δηλ $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma}$



γ) Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής δηλ.
 $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = \widehat{xAB}$



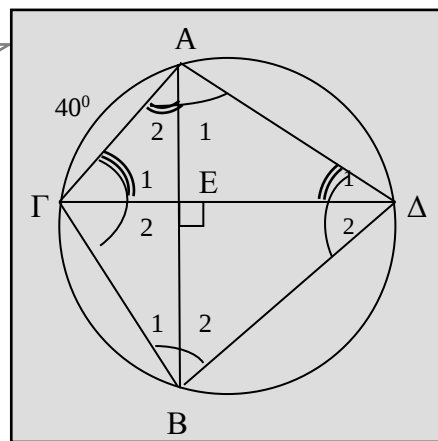
δ) Το μέτρο της εγγεγραμμένης ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της

ε) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- 1.** Θεωρούμε δύο κάθετες χορδές AB , $\Gamma\Delta$ κύκλου (O, R) .
Αν $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$, $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$ τότε να υπολογισθούν οι γωνίες
 του τετραπλεύρου και τα τόξα $B\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$

Λύση



$$\hat{A}_1 = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

(σαν εγγεγραμμένη στο τόξο $A\Gamma = 40^\circ$)

$$\text{Άρα } \hat{\Delta} = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$$

$$\hat{B}_1 = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ \text{ (για τον ίδιο λόγο)}$$

$$\hat{B}_2 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

(από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\hat{E}\Delta$)

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 80^\circ$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_2 = 60^\circ$$

(εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $A\Delta$)

$$\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{B}_1 = 70^\circ$$

(από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\hat{E}B$)

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 60^\circ + 70^\circ = 130^\circ$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 70^\circ$$

(εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $B\Delta$)

$$\hat{A}_2 = \widehat{\Gamma\Delta B} = 30^\circ$$

(εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $B\Gamma$)

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 100^\circ$$

$$B\Gamma = 2\hat{A}_2 = 60^\circ, \quad B\Delta = 2\hat{\Gamma}_2 = 140^\circ, \quad A\Delta = 2\hat{B}_2 = 120^\circ$$

- 2.** Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε μια επίκεντρη γωνία $\hat{A}OB$ και μια εγγεγραμμένη $\hat{M}\hat{\Gamma}\Delta$ ίσες με 120° . Να δείξετε $AB = M\Delta$.

Λύση

$$\hat{A}OB = 120^\circ \Rightarrow AB = 120^\circ \quad \boxed{1}$$

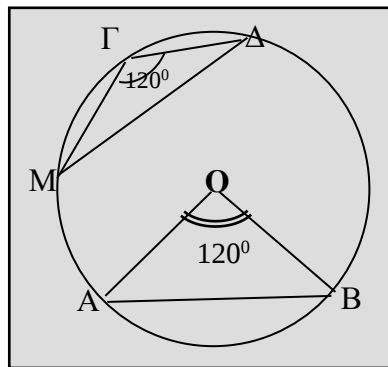
$$\hat{M}\hat{\Gamma}\Delta = 120^\circ \Rightarrow MAB\Delta = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ \text{ τότε}$$

$$M\hat{\Gamma}\Delta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \quad \boxed{2}$$

$\boxed{1} \quad \boxed{2}$

$$\Rightarrow AB = M\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow AB = M\Delta$$

αφού σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.



- 3.** Δίνεται AD διάμετρος κύκλου και χορδή $B\Gamma // AD$. Να δείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ διαφέρουν κατά 90° .

Λύση

Η $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένη στο $A\Delta\Gamma$

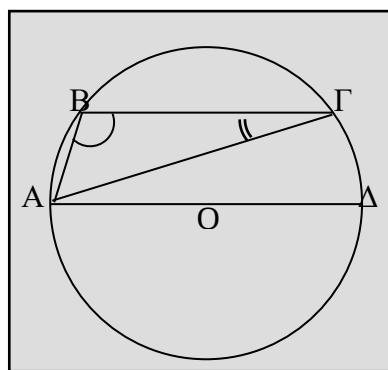
$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{A\Delta\Gamma}{2} \quad \boxed{1}$$

Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στο AB

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \frac{AB}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\text{Αφού } B\Gamma // AD \Rightarrow AB = \Gamma\Delta \text{ Άρα } \hat{\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \hat{B} - \hat{\Gamma} = \frac{A\Delta\Gamma - \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

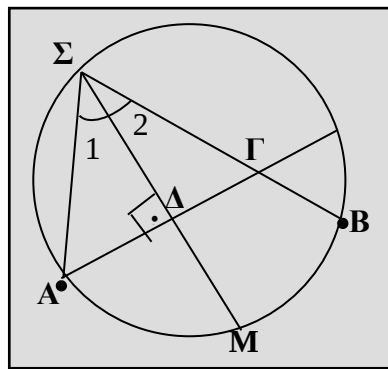


4. Θεωρούμε το μέσο M κυρτογώνιου τόξου AB κύκλου (O, ρ) και σημείο Σ του μη κυρτογώνιου τόξου AB . Αν η κάθετη από το A στη ΣM τέμνει την ΣB στο Γ , τότε να δείξετε ότι $\Sigma\Gamma = \Sigma A$

Λύση

Αφού M μέσον του AB είναι $\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2$
(σαν εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα)

Τότε όμως στο $\Sigma\hat{A}\Gamma$ η $\Sigma\Delta$ είναι ύψος
και διχοτόμος $\Rightarrow \Sigma\hat{A}\Gamma$ ισοσκελές
 $\Rightarrow \Sigma\Gamma = \Sigma A$.



5. Έστω (O, ρ) ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ και Δ, E, Z τα σημεία επαφής. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία του $\Delta\hat{E}Z$ είναι συμπληρωματική με το μισό της απέναντι της γωνίας του $A\hat{B}\Gamma$.

Λύση

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\hat{E} + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ$

$A\Delta = AZ$ (σαν εφαπτόμενα τμήματα από το A στον κύκλο).

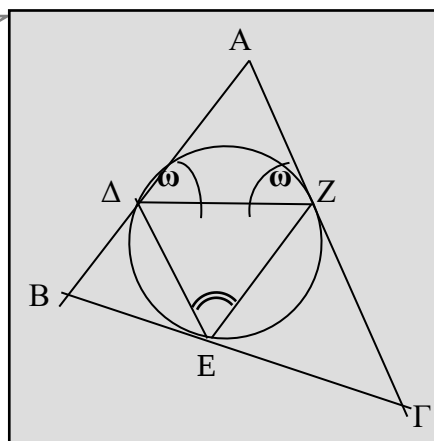
$A\hat{\Delta}Z$ ισοσκ. $\Rightarrow A\hat{\Delta}Z = A\hat{Z}\Delta = \omega$

είναι όμως και

$\hat{E} = A\hat{\Delta}Z = \omega$ γιατί η $A\hat{\Delta}Z$ σχηματίζεται από την χορδή ΔZ και την εφαπτομένη στο άκρο της Δ ενώ η $\hat{E}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο της χορδής

και επειδή από $A\hat{\Delta}Z$ έχω

$$\hat{A} + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{E} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \hat{E} = 90^\circ$$



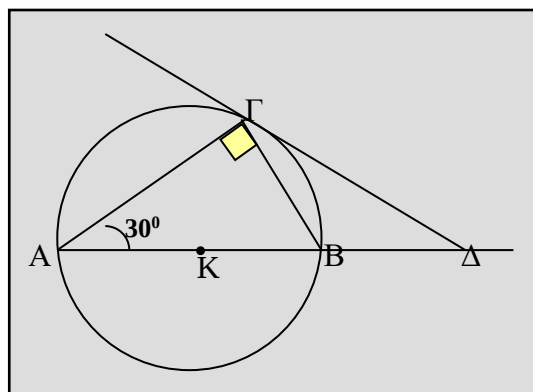
6. Σε κύκλο (K, R) φέρνουμε διάμετρο AB και χορδή AG έτσι ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$. Η εφαπτομένη στο G τέμνει την προέκταση της AB στο Δ . Να αποδειχθεί ότι $GA = GD$.

Λύση

Φέρνουμε την BG τότε $\hat{AGB} = 90^\circ$
(εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)

$$\hat{BGD} = \hat{A} = 30^\circ$$

(γιατί η BGD σχηματίζεται από την χορδή BG και την εφαπτομένη στο άκρο της B ενώ η A είναι εγγεγραμμένη στο τόξο BG της χορδής).



Άρα $\hat{AGD} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ τότε από $\hat{AGD}$ η $\hat{D} = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$

Και αφού $\hat{D} = \hat{A}$ το $\triangle AGD$ ισοσκελές $\Rightarrow GA = GD$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Αν M το μέσο κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ κύκλου (O,R) και A σημείο του μη κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\hat{BAG} = 50^\circ$, να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων $OB\Gamma$, $MB\Gamma$.

2. Δίνεται κύκλος διαμέτρου AB . Φέρνουμε $B\Gamma$ εφαπτόμενο τμήμα και από το μέσο του Δ φέρνουμε ΔN εφαπτομένη στον κύκλο. Να δείξετε ότι τα σημεία A , N , Γ είναι συνευθειακά.

3. Τρίγωνο $\triangle A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ διχοτομεί και την γωνία που σχηματίζεται από το ύψος AD και την διάμετρο AE .

4. Θεωρούμε κύκλο (O,R) με διάμετρο AB και την ακτίνα $OG \perp AB$. Έστω M το μέσο της ακτίνας OB και Δ το σημείο που η GM τέμνει τον κύκλο. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ευθεία OB στο σημείο E , να αποδείξετε ότι $ED = EM$.

5. Οι κορυφές τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ είναι σημεία ενός κύκλου. Από το μέσο M του τόξου $B\Gamma$ φέρνουμε τη χορδή $MN \parallel A\Gamma$. Να δείξετε ότι $MN = AB$.

6. Δίνονται οι κύκλοι (K,R) και $\left(O,\frac{R}{2}\right)$ όπου O μέσον ακτίνας KA του πρώτου κύκλου. Να αποδείξετε ότι κάθε χορδή AB του μεγάλου διχοτομείται από τον μικρό.
